من إصدارات المركز العلمي للترجمة

فيزياء الاهتزازات والأمواج

Physics of Vibrations and Waves

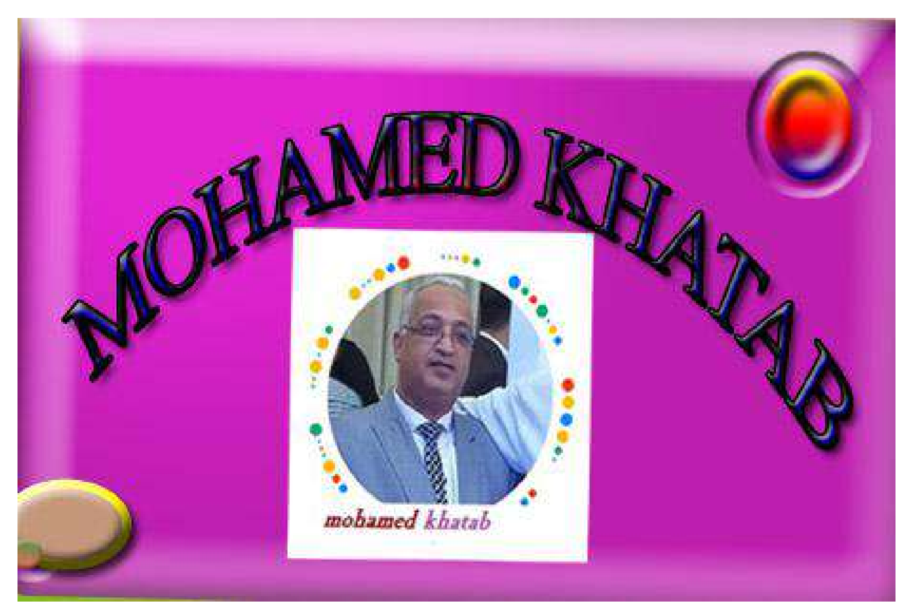


الفصل الأول: الحركة الإهتزازية

Oscillatory Motion

إعداد وترجمة

الدكتور حازم فلاح سكيك



إهداء إلى أبنائي

وطلابي

ومحبي الفيزياء

دكتور حازم فلاح سكيك

www.hazemsakeek.net

مقدمة

الحركة الدورية هي حركة يعود فيها الجسم إلى موقع محدد بعد فترة زمنية ثابتة. فمثلا حركة الأرض حول الشمس هي حركة دورية حيث إن الأرض تعود إلى موقع محدد كل فترة محددة من الزمن. كما ان القمر يعود إلى نفس موقعه بالنسبة للأرض كل فترة محددة من الزمن.

إضافة إلى ذلك هناك الكثير من الأمثلة لأنظمة تتحرك حركة دورية، فحركة الجزئيات في المواد الصلبة تتذبذب حول موضع اتزانها في حركة دورية مستمرة، كذلك الامواج الكهرومغناطيسية مثل أمواج الضوء وأمواج الرادار وأمواج الراديو تنتشر في الفراغ من خلال تذبذب مجالها الكهرومغناطيسي، كذلك التيار الكهربي المتردد والجهد الكهربي والشحنة الكهربية تتغير بصفة دورية مع الزمن.

هناك حالة خاصة من الحركة الدورية تحدث للأنظمة المكيانيكية تكون فيها القوة الميكانيكية تتناسب طرديا مع موضع الجسم بالنسبة لنقطة اتزان ما. اذا كانت هذه القوة دائما في اتجاه نقطة الإتزان فإنه في هذه الحالة تعرف باسم الحركة التوافقية البسيطة *simple harmonic motion* وهذا ما سوف نركز الدراسة عليه في هذا الجزء.

هذا هي ترجمة للفصل الخامس عشر من الوحدة الثانية من كتاب الفيزياء للعلوم والهندسة مع الفيزياء الحديثة *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics* للمؤلف ريموند سيروي *Raymond Serway*. جاءت الترجمة بلغة مبسطة وشرح سلسل ومدعم بالصور والرسومات التي تعطي للنص مزيدا من الوضوح والشرح، هذا بالإضافة إلى الكثير من الأمثلة والتمارين المحلولة التي تساعد على فهم الموضوع والتمكن من حل المسائل في نهاية الجزء.

أتمنى ان يكون هذا العمل في خدمة أبنائنا الطلبة في مختلف الكليات العلمية ليكون لهم مرجعا رئيسيا في مقرر الفيزياء العامة. وان شاء الله سيتم ترجمة باقي الأجزاء على نفس النسق.

مع خالص تحياتي
د. حازم فلاح سكيك
جامعة الأزهر – غزة
غزة في 18-9-2014
www.hazemsakeek.net

توثيق

م	البند	البيان
1	المصدر	**Physics for Scientists and Engineers** **By** **Raymond A. Serway & John W. Jewett** **8th Edition**
2	الموضوع	الوحدة الثانية: فيزياء الاهتزازات والأمواج الجزء الخامس عشر: الحركة الاهتزازية أو التذبذبية
3	المترجم	د/ حازم فلاح سكيك
6	التصنيف	فيزياء
7	الفئة	كتاب
11	التاريخ	2014-9-18

فيزياء الاهتزازات والأمواج

Physics of Vibrations and Waves

الفصل الأول: الحركة الاهتزازية أو التذبذبية

Oscillatory Motion

إعداد وترجمة
الدكتور حازم فلاح سكيك



الحركة الاهتزازية أو التذبذبية

Oscillatory Motion

مقدمة الفصل الأول

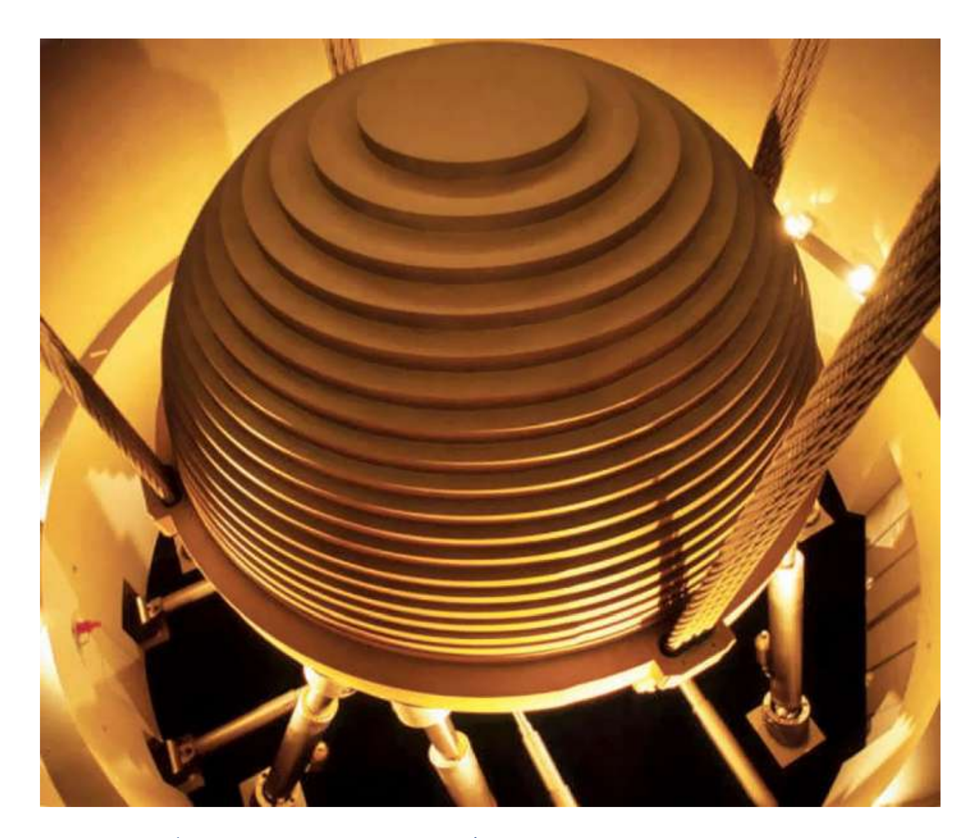
الحركة الاهتزازية أو التذبذبية

ان الحركة الدورية هـي حركـة جسـم يعـود فيهـا إلى موضـع محـدد بعـد فـترة زمنيـة ثابتة. بـالتفكير قليلا في بعـض أنـواع الحركـات مـن حولنـا يمكننـا ان نعـدد الكثـير من الأمثلة على الحركـة الدوريـة في حياتنـا. عـلى سـبيل المثـال انـك تعـود بسـيارتك إلى نفس المكان كل يوم بعـد انتهائـك مـن العمـل. كـما انـك تعـود إلى مائـدة الطعـام كـل مسـاء لتنـاول وجبـة العشـاء. كـذلك لـو راقبـت حركـة أرجوحـة في حديقـة منزلـك أو في حديقـة عامـة لوجـدت ان حركتهـا هـي حركـة دوريـة تعـود فيهـا إلى موضـعها الأصـلي كـل فـترة زمنيـة محـددة. هـذا بالإضـافة إلى ان حركـة الأرض حـول الشـمس هـي حركـة دوريـة بحيـث إن الأرض تعـود إلى موضـع محـدد كـل فترة زمنية محـددة وهـذا هـو السـبب في تعاقـب الفصـول الأربعـة كـل عـام. كـما ان القمر يعود إلى نفس موضعه بالنسبة إلى الأرض كل فترة زمنية محددة.

كما ان هنـاك الكثـير مـن الأمثلـة لأنظمـة تتحـرك حركـة دوريـة، فحركـة الجزيئـات في المـواد الصـلبة هـي حركـة اهتزازيـة حيـث تتذبـذب الجزيئـات حـول موضـع اتزانهـا في حركـة دوريـة مسـتمرة، وتـزداد قـوة هـذه الحركـة كلـما ارتفعـت درجـة الحـرارة، كـذلك الامـواج الكهرومغناطيسـية مثـل أمـواج الضـوء وأمـواج الـرادار وأمـواج الراديـو تنتشر في الفـراغ مـن خـلال تذبـذب مجالهـا الكهرومغناطيسي، كـذلك التيـار الكهـربي المـتردد والجهـد الكهـربي والشـحنة الكهربيـة تتغـير قيمتهـا بصفة دورية مع الزمن.

هناك حالة خاصـة مـن الحركـة الدوريـة تحدث في العديـد مـن الأنظمـة المكيانيكيـة حيث تتناسب فيهـا القـوة الميكانيكيـة المؤثرة عـلى جسـم تناسـبا طرديـا مـع ازاحـة

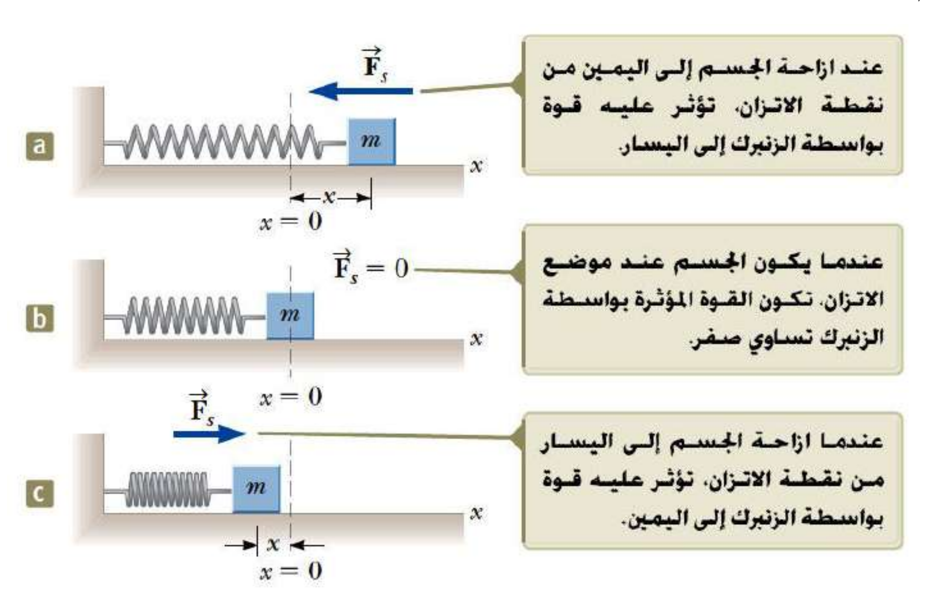
الجسم بالنسبة إلى نقطة اتزان ما. اذا كانت هذه القوة دائما في اتجاه نقطة الإتزان فان حركة الجسم في هذه الحالة تعرف باسم الحركة التوافقية البسيطة simple harmonic motion وهذا ما سوف نركز الدراسة عليه في هذا الفصل من الكتاب.



للتغلب على تمايل المباني العالية تحت تأثير الرياح، يتم استخدام أنظمة اخماد الحركة الاهتزازية وتثبت بالقرب من قمة المبنى. يحتوي نظام الاخماد هذا على اجسام ذات كتلة كبيرة تتذبذب بتحكم من الكمبيوتر عند نفس تردد المبنى مما يعمل على تقليل التمايل. الكرة المعلقة التي يصل وزنها إلى 730 طن في الصورة أعلاه هي جزء من نظام اخماد الحركة الاهتزازية المثبت في مركز تايبيه المالي في تايوان والذي يصل ارتفاعه إلى 500 متر.

1.1 حركة جسم متصل في زنبرك Motion of an object attached to a spring

كمثال على الحركة الدورية حركة جسم متصلا مع زنبرك وتعرف هذه الحركة باسم الحركة التوافقية البسيطة simple harmonic motion ولشرح هذا النوع من الحركة دعنا نفترض جسم كتلته m متصلا مع زنبرك يتحرك على سطح أفقي عديم الاحتكاك كما في الشكل 1.1. عندما يكون الزنبرك في حالة الاستقرار أي إن استطالة الزنبرك تساوي صفر، فان الزنبرك يكون في حالة اتزان عند $x = 0$. نعلم إن الزنبرك يتذبذب في هذه الحالة إلى اليمين وإلى اليسار إذا تعرض إلى أي اضطراب يؤدي إلى استطالته أو انضغاطه.



شكل 1.1 جسم متصل مع زنبرك يتحرك على سطح افقي عديم الاحتكاك. (a) عندما يتحرك الجسم إزاحة إلى اليمين عن نقطة الاتزان $x > 0$، فان القوة المتولدة في الزنبرك تكون إلى اليسار. (b) عندما يكون الجسم في حالة اتزان عند $x = 0$، فان القوة المؤثرة بواسطة الزنبرك تساوي صفر. (c) عندما تكون إزاحة الجسم إلى اليسار بحيث ان $x < 0$، فان القوة المتولدة في الزنبرك تكون إلى اليمين.

من الشكل 1.1 نستطيع أن نفهم انه إذا أزيح الجسم إلى اليمين أو إلى اليسار نتيجة لتأثير قوة خارجية، فان قوة معينة تتولد في الزنبرك تسمى بالقوة الاسترجاعية restoring

force ويكون اتجاهها دائما عكس اتجاه القوة المؤثرة الخارجية. يمكن حساب القوة الاسترجاعية التي تتولد في الزنبرك من خلال قانون هوك Hooke's law والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$F_s = -kx \qquad (1.1)$$

حيث ان k تعرف بثابت الزنبرك ولها وحدة N/m، وx هي إزاحة الجسم عن موضع اتزانه الأصلي، اما F_s هي القوة الاسترجاعة المتولدة في الزنبرك والتي تنتج تحت تأثير قوة الازاحة الخارجية وسميت بالقوة الاسترجاعية restoring force لان هذه القوة تكون دائما في اتجاه نقطة الاتزان وفي عكس اتجاه ازاحة الجسم وتحاول ارجاع الجسم إلى موضعه الأصلي. ولهذا إذا أزيح الجسم إلى اليمين من النقطة $x = 0$ أي في الاتجاه الموجب كما في الشكل 1.1 a فان اتجاه القوة الاسترجاعية يكون إلى اليسار. وعند إزاحة الجسم إلى اليسار من النقطة $x = 0$، أي في الاتجاه السالب كما هو موضح في الشكل 1.1 c فان القوة الاسترجاعية سوف تكون إلى اليمين.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني $\sum F_x = ma_x$ على حركة الجسم وباستخدام المعادلة 1.1 فان محصلة القوة في الاتجاه x تكون على النحو التالي:

$$-kx = ma_x$$

$$\therefore a_x = -\frac{k}{m}x \qquad (1.2)$$

ولهذا فان التسارع (العجلة acceleration) يتناسب تناسبا طرديا مع موضع الجسم وفي الاتجاه المعاكس للإزاحة من نقطة الاتزان وكل جسم يتصرف على هذا النحو فإن حركته تسمى بالحركة التوافقية البسيطة simple harmonic motion. وعليه فان أي جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة يكون تسارع هذا الجسم تتناسب تناسبا طرديا مع إزاحته وفي الاتجاه المعاكس لموضع الاتزان.

إذا أزيح الجسم الموضح في الشكل 1.1 إلى الموضع A ومن ثم تم تركه، فان التسارع الابتدائي له يساوي $-kA/m$. وعندما يمر الجسم خلال نقطة الاتزان $x = 0$ فان تسارعه يكون مساوية للصفر، عند هذه اللحظة فان سرعة الجسم تكون اكبر ما يمكن لان

التسارع يغير اتجاهه (أي تتغير إشارته). يستمر الجسم في الحركة إلى اليسار من نقطة الاتزان بتسارع موجب ليصل إلى الموضع $x = -A$ ، وعندها يكون التسارع موجب ويساوي $+kA/m$ وتكون السرعة مساوية للصفر.

يكمل الجسم دورة كاملة من حركته عندما يعود إلى نقطة البدء، ثم يمر مرة اخرى بالنقطة $x = 0$ بأكبر سرعة ممكنة. وبهذا نرى ان الجسم يتذبذب بين نقطتين هما $x = \pm A$ في حالة عدم وجود احتكاك، ولان القوة المبذولة بواسطة الزنبرك تكون قوة محافظة، وبالتالي تستمر الحركة إلى مالانهاية. سوف ندرس حالة الحركة في وجود احتكاك في الفصل 6.1.

ملاحظة: الحالة التي ناقشناها في الجزء السابق تنطبق ايضا على الجسم المعلق في زنبرك حيث ان كتلة الجسم سوف تتسبب في استطالة الزنبرك في اتجاه الأرض، وتحدث له ازاحة من نقطة الاتزان مسافة معينة وتصبح نقطة الاتزان عند نقطة جديدة نعتبر انها النقطة $x = 0$. ولتوضيح ذلك نفرض ان x_s تمثل الاستطالة الكلية للزنبرك من نقطة الاتزان عندما لا يكون هناك أي جسم معلقاً به. وعليه فان استطالة الزنبرك تعطى من خلال المعادلة $x_s = -(mg/k) + x$ حيث إن $-(mg/k)$ تمثل استطالة الزنبرك نتيجة لوزن الجسم المعلق به و x هي الاستطالة الحادثة للزنبرك نتيجة للحركة التوافقية البسيطة. مقدار القوة المحصلة على الجسم هي

$$F_s - F_g = -k(-(mg/k) + x) - mg = -kx$$

نستنتج من ذلك ان القوة المحصلة المؤثرة على الجسم المعلق في زنبرك هي نفسها القوة المؤثرة على الجسم المتصل بالزنبرك في الوضع الافقي كما هو موضح في الشكل 1.1.

سؤال للتفكير 1.1

تم سحب جسم متصل بنهاية زنبرك إلى الموضع $x = A$ ومن ثم تم تركه ليتذبذب. ما هي المسافة التي يقطعها الجسم في دورة كاملة من حركته. (a) $A/2$، (b) A، (c) $2A$، (d) $4A$.

2.1 التمثيل الرياضي للحركة التوافقية البسيطة
Mathematical representation of simple harmonic oscillator

سنقوم الآن باشتقاق معادلة رياضية تصف الحركة التوافقية البسيطة التي تحدثنا عنها مسبقاً. تحدد المعادلة 1.1 القوة المؤثرة على الجسم المتصل مع الزنبرك والذي يتذبذب على محور x الأفقي. حيث إن التسارع هو معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن فان مقدار التسارع a يعطى على النحو التالي:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

وبالتالي يمكن ان نعبر عن المعادلة 2.1 على النحو التالي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad (1.3)$$

لنعبر عن النسبة $\frac{k}{m}$ بـ ω^2 (لقد اخترنا الرمز ω^2 بدلا عن ω وذلك حتى نجعل الحل الذي سوف نصل له أكثر سهولة)، وعليه يكون لدينا،

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad (1.4)$$

وبالتالي فان المعادلة 3.1 يمكن أن نكتبها على النحو التالي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad (1.5)$$

ان المعادلة 5.1 هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية وتحتاج الى حل رياضي وهذا الحل سيكون دالة $x(t)$ تحقق المعادلة، وتمثل هذا الدالة تغير موقع الجسم بالنسبة إلى الزمن. سوف نبحث الان عن معادلة $x(t)$ بحيث تكون نتيجة المشتقة الثانية لها هي نفس المعادلة الأصلية مع إشارة سالبة ومضروبة في ω^2. يتحقق هذا الشرط في الدوال الجيبية مثل دالة الجيب sin أو جيب التمام cos، وبالتالي من الممكن ان تكون أي منهما حلا للمعادلة 5.1. سوف نختار الدالة التالية كحل للمعادلة التفاضلية.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (1.6)$$

حيث إن A، وω، وϕ عبارة عن ثوابت. ولكي نتأكد من إن المعادلة 6.1 تحقق المعادلة 5.1 سوف نتتبع هذا الاشتقاق التالي:

$$\frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \phi) = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \qquad (1.7)$$

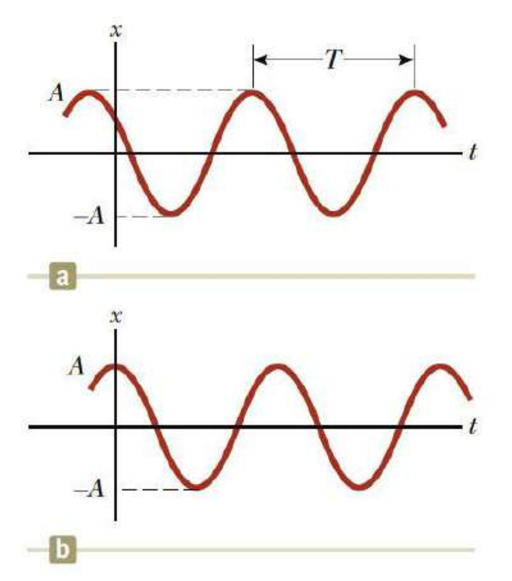
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A\frac{d}{dt}\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \qquad (1.8)$$

نجد أن المعادلة 8.1 تؤول إلى المعادلة 5.1 وهذا يعني أن الدالة 6.1 هي حل للمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة.

تمثل الثوابت A و ω و φ ثوابت الحركة. ولكي نعرف المعنى الفيزيائي لها، فانه من المناسب ان نقوم بتمثيل هذه الحركة بيانياً حيث نرسم x كدالة في الزمن، كما هو موضح في الشكل 2.1 a. في البداية، لاحظ إن A تعرف بسعة الحركة amplitude وهي أقصى إزاحة للجسم سواء في الاتجاه الموجب أو الاتجاه السالب. أما الثابت ω يعرف باسم التردد الزاوي angular frequency وله وحدة rad/s. وهي تحدد مقدار سرعة التذبذب فكلما ازداد مقدار التذبذب لكل وحدة زمن كلما ازدادت قيمة ω. من المعادلة 4.1 نجد إن التردد الزاوي ω يعطى بالعلاقة التالية:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (1.9)$$

اما الثابت الذي يحدد بالزاوية ϕ يسمى ثابت الطور phase constant أو زاوية الطور الابتدائية initial phase angle

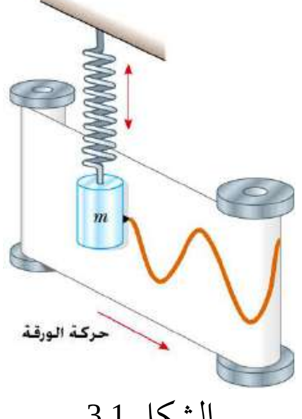


الشكل 2.1 (a) يوضح منحنى للازاحة x مع الزمن t لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة. سعة الحركة هي A، والزمن الدوري T، وثابت الطور ϕ. (b) يوضح منحنى للازاحة x مع الزمن t لحالة خاصة عندما تكون $x = A$ و$\phi = 0$.

ويتم تحديد كلا من ثابت الطور ϕ والسعة A من خلال موقع الجسم وسرعته عند الزمن $0 = t$. إذا كان الجسم عند أقصى إزاحة له أي ان $x = A$ وعند $t = 0$، فان ثابت الطور $\phi = 0$ والتمثيل البياني للحركة موضح في الشكل b 2.1. والكمية $(\omega t+\phi)$ تعرف باسم طور الحركة phase of motion. لاحظ ان الدالة $x(t)$ هذ دالة دورية ويكون لها نفس القيمة كل فترة زمنية عندما تزداد ωt بمقدار 2π.

المعالات الثلاثة 1.1 و 5.1 و6.1 تشكل الاساس الرياضي للحركة التوافقية البسيطة. فالقوة المؤثرة على الجسم يمكن أن نمثلها بالمعادلة 1.1، وموضع الجسم الذي يتحرك حركة توافقية بسيطة يوصف بالمعادلة 6.1، واذا قمنا بتحليل حركة الجسم ووجدنا انه من الممكن أن نصفها بالمعادلة التفاضلية 5.1 فان الحركة تكون حركة توافقية بسيطة. وإذا كان موقع الجسم يوصف بالمعادلة 6.1 فان الجسم أيضا يخضع لحركة توافقية بسيطة.

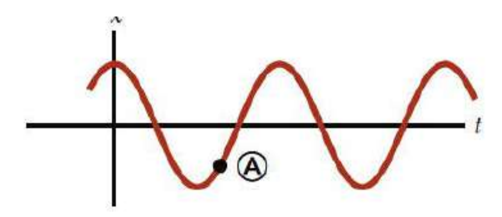
ملاحظة: في الشكل 3.1 المقابل تجربة بسيطة لتوضيح الحركة التوافقية البسيطة. في هذه التجربة تم تعليق جسم في زنبرك يتذبذب رأسيا. تم تثبيت قلم في الجسم. اثناء تذبذب الجسم تحركت ورقة في اتجاه عمودي على اتجاه حركة الزنبرك ورسم القلم منحنى جيبي كما في المعادلة 5.1.



الشكل 3.1

سؤال للتفكير 2.1

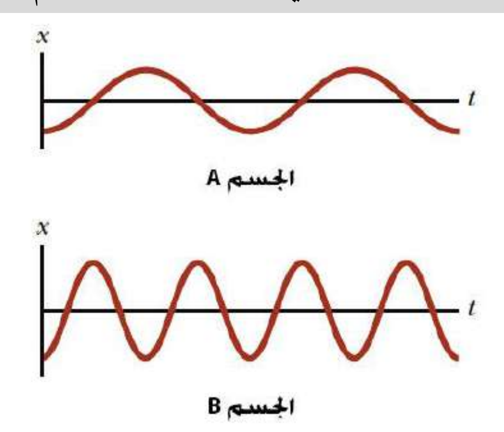
لنفترض التمثيل البياني لحركة توافقية بسيطة الموضح في الشكل 4.1 كما تصفها المعادلة 6.1. عندما يكون الجسم عند النقطة A على المنحنى، فان (a) كل من الموضع والسرعة تكونان موجبتين (b) الموضع والسرعة كلاهما سالبا، (c) الموضع موجب والسرعة سالبة، (d) الموضع سالب والسرعة صفر، (e) الموضع موجب والسرعة سالبة، (f) الموضع سالب والسرعة موجبة؟



الشكل 4.1 يمثل منحنى لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة. عند زمن معين فان الجسم يكون عن الموضع A على المنحنى.

سؤال للتفكير 3.1

الشكل 5.1 يوضح منحنيين يمثلان جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة. الوصف الصحيح لهاتين الحركتين هي إن الجسم B يكون (a) له تردد زاوي وسعة اكبر من الجسم A، (b) تردد زاوي اكبر ولكن سعة اصغر من الجسم A، (c) تردد زاوي اصغر وسعة اكبر من الجسم A، (d) تردد زاوي وسعة اكبر من الجسم A.



الشكل 5.1 منحنيان بيانيان للعلاقة بين x وt لجسمين يتحركان حركة توافقية بسيطة، لهما تردد زاوي وسعة مختلفة.

لنقوم الآن بمزيد من التوضيح وذلك بالاستعانة بالتمثيل الرياضي للحركة التوافقية البسيطة. فالزمن الدوري T للحركة يعرف على انه هو الفترة الزمنية اللازمة للجسم لكي يقوم بدورة كاملة (الشكل 2.1 a). هذا يعني ان قيمة الإزاحة x والسرعة v للجسم عند الزمن t تساوي قمية الإزاحة والسرعة عند زمن $t + T$. والان يمكننا أن

نربط الزمن الدوري مع التردد الزاوي من خلال الاستفادة من أن الطور يزداد بمقدار 2π كل فترة زمنية مقدارها T على النحو التالي:

$$[\omega(t+T)+\phi]-(\omega t+\phi)=2\pi$$

وبتبسيط هذه المعادلة نجد إن $\omega T = 2\pi$, أو

$$T=\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \qquad (1.10)$$

ان مقلوب الزمن الدوري يعرف بالتردد frequency للحركة. بما ان الزمن الدوري هو الفترة الزمنية اللازمة لعمل اهتزازة كاملة، فان التردد يمثل عدد الاهتزازات التي يقوم بها الجسم لكل وحدة زمن.

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi} \qquad (1.11)$$

وحدة التردد f هي دورة لكل ثانية وتعرف بوحدة الهرتز hertz ويرمز لها بالرمز Hz.
وباعادة ترتيب المعادلة 11.1 فان

$$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T} \qquad (1.12)$$

من الممكن ان نستخدم المعادلات الثلاثة 9.1 و10.1 و11.1 للتعبير عن الزمن الدوري T والتردد f لحركة جسم متصل بالزنبرك وذلك من خلال الخصائص الذاتية للجسم والزنبرك وهما الكتلة m وثابت الزنبرك k.

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (1.13)$$

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (1.14)$$

وبهذا نجد ان كلا من الزمن الدوري T والتردد f يعتمدان على كتلة الجسم وعلى ثابت الزنبرك، وليس على عوامل الحركة، والتي هي السعة A والطور ϕ. وكما نتوقع، فان

التردد يكون اكبر في حالة الزنبرك القاسي أي ذو ثابت زنبرك k كبير ويقل التردد بزيادة كتلة الجسم.

من الممكن أن نجد سرعة الجسم وتسارعه عندما يتحرك حركة توافقية بسيطة وذلك من خلال المعادلتين 7.1 و8.1 على النحو التالي:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \qquad (1.15)$$

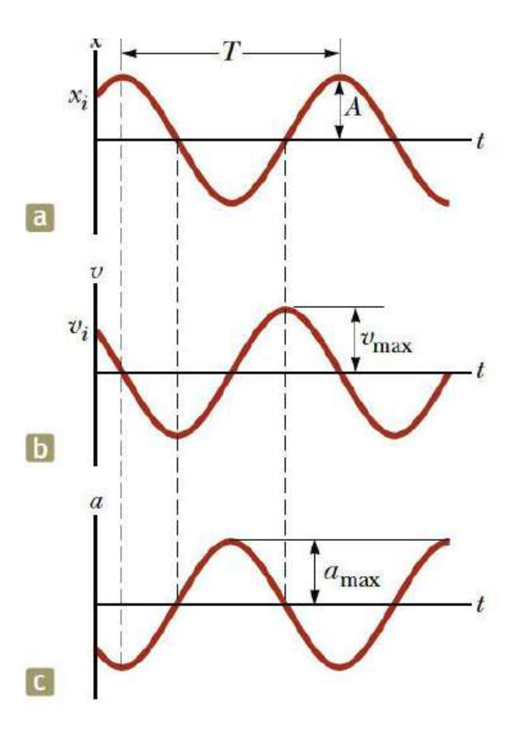
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \qquad (1.16)$$

من المعادلة 15.1 نجد انه بسبب دالة الجيب ودالة جيب التمام تتذبذبان بين قيمتين هما ±1، فإن القيم العظمى للسرعة سوف تكون $\pm\omega A$. وبالمثل من المعادلة 16.1 نجد ان القيم العظمى للتسارع a سوف تكون $\pm\omega^2 A$. وعليه فان القيم العظمى للسرعة والتسارع سوف يكونا على النحو التالي:

$$v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}A \qquad (1.17)$$

$$a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m}A \qquad (1.18)$$

يوضح الشكل 6.1 a مخططا للعلاقة بين الموضع والزمن عند قيمة اختيارية للطور. منحنى علاقة السرعة مع الزمن وعلاقة التسارع مع الزمن موضحة في الشكل 6.1 b والشكل 6.1 c. حيث نجد ان طور السرعة يختلف عن طور الموضع بمقدار 90^{o} أي $\pi/2$. فعندما تكون x في اقصى قيمة أو اعلى قيمة، فان السرعة تكون مساوية للصفر. وبالمثل عندما تكون x مساوية للصفر فان السرعة تكون اقصى ما يمكن. اضافة إلى ذلك، نلاحظ ان طور التسارع يختلف عن طور الموضع بمقدار 180^{o} أو π. على سبيل المثال، عندما تكون x أقصى قيمة، فان التسارع يكون أقصى ما يمكن ولكن في الاتجاه المعاكس.



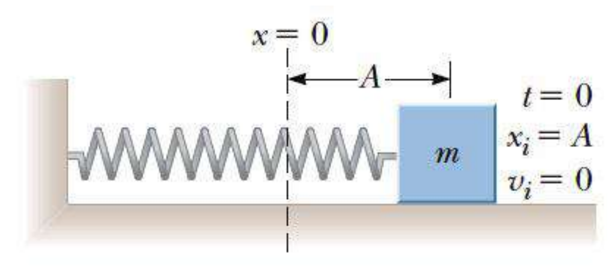
الشكل 6.1 تمثيل بياني للحركة التوافيقة البسيطة. (a) علاقة الموضع مع الزمن. (b) علاقة السرعة مع الزمن. (c) علاقة التسارع مع الزمن. لاحظ عند أي زمن تكون السرعة 90^o مختلفة في الطور مع الموضع، والتسارع يكون مختلف في الطور مع الموضع بمقدار 180^o.

سؤال للتفكير 4.1

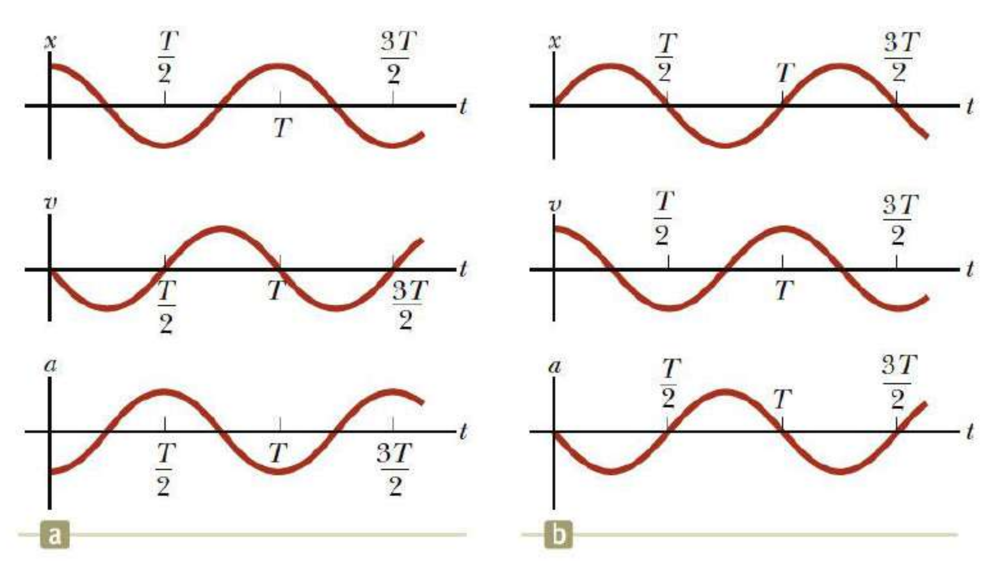
جسم كتلته m معلق في زنبرك يتذبذب بحركة توافقية بسيطة. الزمن الدوري للتذبذب مقاس ومسجل على انه T. فاذا تم استبدال الجسم m بجسم اخر كتلته $2m$. عندما يتذبذب الجسم $2m$ فان الزمن الدوري للحركة يكون (a) $2T$، (b) $\sqrt{2}T$، (c) T، (d) $T/\sqrt{2}$، (e) $T/2$.

تصف المعادلة 6.1 الحركة التوافقية البسيطة للجسم بصفة عامة، لنرى الان كيف نحسب ثوابت الحركة. فالتردد الزاوي ω يحسب من المعادلة 9.1. والثوابت A و φ تحدد الحالة الابتدائية للحركة عند الزمن $t = 0$.

افترض إن الحركة بدأت عند سحب الجسم من موضع الاتزان مسافة A ومن ثم ترك من السكون عند الزمن $t = 0$، كما في الشكل 7.1.



الشكل 7.1 كتلة متصلة بزنبرك تبدأ الحركة من السكون عند $x = A$ و $t = 0$، وفي هذه الحالة تكون $\phi = 0$ و عليه فان $x = A\cos\omega t$



الشكل 8.1 (a) يوضح الموضع، والسرعة، والتسارع كدالة في الزمن لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة بشروط ابتدائية هي $t = 0$ و $x(0) = A$ و $v(0) = 0$. (b) يوضح الموضع، والسرعة، والتسارع كدالة في الزمن لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة بشروط ابتدائية هي $t = 0$ و $x(0) = A$ و $v(0) = v_i$.

وهذا يتطلب أن نجد حلا لكلا من $x(t)$ و $v(t)$ (المعادلة 6.1 والمعادلة 5.1) تحققان الشروط الابتدائية وهي $x(0) = A$ و $v(0)=0$:

$$x(0) = A\cos\phi = A$$

$$v(0) = -\omega A\sin\phi = 0$$

تتحقق هذه الشروط إذا اخترنا الطور الابتدائي initial phase بحيث ان $\phi = 0$، و $x = A\cos\omega t$ كحل. وللتحقق من الحل يجب أن تكون $x(0) = A$ لان $\cos 0 = 1$.

علاقة الموضع والسرعة والتسارع مع الزمن ممثلة في الشكل 8.1 a لهذه الحالة الخاصة. يصل التسارع إلى أقصى قيمة له وهي $\pm\omega^2 A$ عندما يكون موضع الجسم في أقصى قيمة له وهي $\pm A$. أضف إلى ذلك إن السرعة لها أقصى قيمة وهي $\pm\omega A$ عند $x = 0$. وعليه فان الحل يكون متفقا مع الحالة التي ندرسها.

لنفترض احتمالية أخرى وهي عندما يكون الجسم في حالة حركة اهتزازية، ولنعرف الزمن $t = 0$ على انه هو الزمن الذي عنده يمر الجسم بنقطة اتزان الزنبرك وهو في حركته إلى اليمين كما في الشكل 9.1. في هذه الحالة يجب أن يكون الحل الذي يحقق هذه الحالة لـ $x(t)$ و $v(t)$ يحقق الشروط الابتدائية وهي إن $x(0) = 0$ و $v(0) = v_i$:

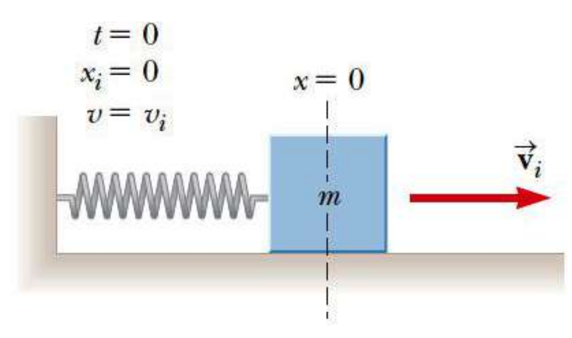
$$x(0) = A\cos\phi = 0$$

$$v(0) = -\omega A\sin\phi = v_i$$

الشرط الأول يخبرنا إن $\phi = \pm\pi/2$. مع هذين الخيارين لـ ϕ، فان الشرط الثاني يخبرنا بان السعة $A = \pm v_i/\omega$. حيث ان السرعة الابتدائية موجبة والسعة لابد وان تكون موجبة أيضا، فإننا نحصل على $\phi = -\pi/2$. ولهذا فان الحل يعطى على النحو التالي:

$$x = \frac{v_i}{\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

منحنيات علاقة الموضع والسرعة والتسارع مع الزمن لهذه الحالة عند $t = 0$ موضحة في الشكل 8.1 b. لاحظ إن هذه المنحنيات هي نفسها المنحنيات في الشكل 8.1 b، ولكنها مزاحة إلى اليمين بربع دورة. ويعبر عن ذلك رياضيا بواسطة ثابت الطور phase constant $\phi = -\pi/2$، وهذا يمثل ربع دورة من 2π.



الشكل 9.1 كتلة متصلة بزنبرك تتحرك حركة توافقية بسيطة، و $t = 0$ تعرف في اللحظة التي تمر فيه الكتلة نقطة الاتزان $x = 0$ وتتحرك لليمين بسرعة v_i.

مثال 1.1 جسم متذبذب An Oscillating Object

جسم يتذبذب بحركة توافقية بسيطة على محور x. يتغير موقعه بالنسبة للزمن طبقا للمعادلة التالية:

$$x = (4.00m)\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

حيث t هو الزمن بوحدة الثانية والزاوية بين القوسين مقدرة بوحدة rad. (A) حدد مقدار السعة، والتردد، والزمن الدوري للحركة. (B) احسب السرعة والتسارع للجسم عند أي زمن t. (C) من النتائج التي ستحصل عليها من حل الجزء (B) قم بحساب موضع الجسم وسرعته وعجلته عند الزمن $t = 1s$. (D) حدد اقصى قيمة لسرعة الجسم واقصى قيمة لسرعته. (E) اوجد إزاحة الجسم بين $t = 0$ و $t = 1$.

الحل (A):

بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة 6.1

$$x(t) = A\,cos\,(\omega t + \phi)$$

نجد أن $A = 4.00m$ والتردد الزاوي $\omega = \pi$ rad/s وعليه فان التردد

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 0.5Hz$$

والزمن الدوري

$$T = \frac{1}{f} = 2sec$$

الحل (B):

لإيجاد السرعة v نقوم بإجراء عملية التفاضل لـ x بالنسبة للزمن t. نحصل على

$$v = \frac{dx}{dt} = -(4.00\text{m/s})\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\frac{d}{dt}(\pi t)$$

$$v = -(4.00\pi \text{ m/s})\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

وللحصول على التسارع نقوم بإجراء عملية التفاضل للسرعة v بالنسبة للزمن فنحصل على المعادلة التالية:

$$a = \frac{dv}{dt} = -(4.00\pi \text{ m/s})\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\frac{d}{dt}(\pi t)$$

$$a = -(4.00\pi^2 \text{m/s}^2)\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

الحل (C):

بالتعويض عن الزمن $t = 1\text{s}$ نستطيع عن نحصل على المعلومات المطلوبة لكل من الموقع والسرعة والتسارع.

$$x = -(4 \text{ m})\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = (4 \text{ m})\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = (4 \text{ m})(-0.707) = -2.83\text{m}$$

$$v = -(4\,\pi \text{ m/s})\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\,(4\,\pi \text{ m/s})(-0.707) = 8.89 \text{ m/s}$$

$$a = -(4\,\pi^2 \text{ m/s}^2)\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -(4\,\pi^2\text{m/s}^2)(-0.707) = 27.9\text{m/s}^2$$

الحل (D):

بصفة عامة فان السرعة والتسارع للجسم هي التي قمنا بحسابها في الجزء (B) واقصى قيمة للسرعة والتسارع يكون عندما تكون كل من دالة الجيب وجيب التمام تساوي الوحدة. ولهذا فإن السرعة v تتغير بين القيمتين $\pm 4.00\pi$ m/s، ويتغير التسارع a بين القيمتين $\pm 4.00\pi^2$ m/s^2. ولهذا فان

$$v_{max} = 4.00\,\pi\text{m/s} = 12.6\text{m/s}$$
$$a_{max} = 4.00\pi^2 \text{ m/s}^2 = 39.5\text{m/s}^2$$

ويمكن أن نحصل على نفس النتائج باستخدام المعادلة $v_{max} = \omega A$ و $a_{max} = \omega^2 A$ حيث ان $A = 4.00\text{m}$ و $\omega = \pi$ rad/s

الحل (E):

موضع الجسم عند الزمن $t = 0$ هو

$$x_i = (4\text{ m})\cos\left(0 + \frac{\pi}{t}\right) = 2.83\text{m}$$

وحيث إننا من حل الجزء (C)، وجدنا إن الموضع عند الزمن $t = 1$ هو -2.83 m ولهذا فان الإزاحة بين $t = 0$ و $t = 1$ يكون على النحو التالي:

$$\Delta x = x_f - x_i = -2.83m - 2.83m = -5.66m$$

مثال 2.1 كن حذر من الحفر Watch Out for Potholes!

سيارة كتلتها 1300 kg مثبتة على أربعة زنبركات. ثابت كل زنبرك 20,000 N/m. إذا صعد في السيارة رجلين كتلتهما 160 kg، اوجد تردد الاهتزاز للسيارة عندما تمر على أخدود ضيق على الطريق.

الحل:

تصور المسألة: لنتمكن من حل هذا المثال دعنا نسترجع خبرتنا العملية حيث اننا عندما نركب السيارة فانه نتيجة لقوة وزن الجسم تنخفض السيارة بقدر بسيط نتيجة لانضغاط الزنبرك. كما انك لا شك وانك قد حاولت مرة ان تقوم بالضغط على مقدمة السيارة بالقوة للأسفل لتتذبذب السيارة عدة مرات.

تصنيف المسألة: حيث ان السيارة تكون محمولة بواسطة 4 زنبركات لذلك سوف نقوم بالتعامل مع زنبرك مكافئ، سوف ننمذج السيارة كجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة.

تحليل المسألة: في البداية دعنا نحسب ثابت الزنبرك المكافئ للأربعة زنبركات. لازاحة x للزنبركات فان القوة الكلية المؤثرة على السيارة هي مجموع القوى الناتجة عن كل زنبرك. الصيغة التي سوف نستخدمها للقوة الكلية المؤثرة على السيارة على النحو التالي:

$$F_{total} = \sum(-kx) = -\left(\sum k\right) x$$

حيث ان x تمثل الإزاحةالمتساوية للأربع زنبركات في السيارة لذلك فقد تم إخراجها من أقواس المجموع. وهنا نلاحظ ان ثابت الزنبرك المكافئ يعطى بالعلاقة التالية:

$$k_{eff} = \sum k = 4 \times 20{,}000 \text{ N/m} = 80{,}000 \text{ N/m}$$

وعليه فان تردد التذبذب الذي يحدث في السيارة يحسب من المعادلة 1.14 على النحو التالي:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{80{,}000\text{N/m}}{1460\text{kg}}} = 1.18 \text{ Hz}$$

الخلاصة: لاحظ هنا اننا استخدمنا كتلة السيارة + كتلة الرجلين عند التعويض عن m في المعادلة السابقة لانها تشكل الكتلة الكلية المتذبذبة. كذلك لاحظ ان ركزنا على حركة السيارة للأعلى وللأسفل. كذلك لو ان تذبذب السيارة بشكل مختلف بحيث ان مقدمة السيارة ترتفع للأمام في حين ان مؤخرة السيارة تنخفض للأسفل فان التردد سوف يكون مختلفا في هذه الحالة.

ماذا لو؟ افترض ان رجلين خرجا من السيارة وقام احدهما بالضغط على مقدمة السيارة لتتذبذب. فهل تردد الاهتزازات يختلف عن ما سبق؟

الإجابة: نظام تعليق السيارة المكون من أربعة زنبركات لم يختلف ولكن كتلة الجسم المتذبذب الان اقل. دعنا نحسب التردد ولكن هنا الكتلة ستكون هي كتلة السيارة ولهذا نتوقع ان يكون التردد أعلى.

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{80{,}000\text{N/m}}{1300\text{kg}}} = 1.25\ \text{Hz}$$

وكما توقعنا فان التردد يكون اعلى قليلا.

مثال 3.1 جسم متصل بزنبرك A Block–Spring System

جسم كتلته 200 g متصل بزنبرك (k = 5.00 N/m) يتذبذب أفقيا على سطح عديم الاحتكاك. فإذا تم سحب الجسم مسافة مقدارها 5.00 cm من نقطة الاتزان ثم ترك من السكون كما في الشكل 7.1 (A) اوجد الزمن الدوري للحركة، (B) أقصى سرعة للجسم، (C) أقصى تسارع للجسم، (D) عبر عن موضع الجسم وسرعته وتسارعه بدالة مع الزمن.

الحل (A):

تصور المسألة: قم بدراسة الشكل 6.1 وتخيل ان الجسم يتحرك للأمام والخلف في حركة توافقية بسيطة بمجرد تركه. جهز التجربة في الاتجاه الرأسي بتعليق جسم ثقيل بخيط مطاطي.

تصنيف المسألة: ننمذج الجسم كجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة. نقوم بإيجاد القيم من المعادلات التي تم تطويرها في هذا الجزء لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة، لذلك فاننا ننمذج هذا المثال على انه مسألة تعويض مباشرة.

باستخدام المعادلة 9.1 و10.1 لايجاد التردد الزاوي للجسم على النحو التالي:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5.00\text{N/m}}{200\times10^{-3}\text{kg}}} = 5.00\ \text{rad/sec}$$

والزمن الدوري يكون

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5.00\ \text{rad/sec}} = 1.26\ \text{sec}$$

الحل (B):

باستخدام المعادلة 17.1 نحصل على اقصى سرعة يتحرك بها الجسم وهي

$$v_{max} = \omega A = (5.00\ \text{rad/sec})(5.00 \times 10^{-2}\text{m}) = 0.250\ \text{m/s}$$

الحل (C):

باستخدام المعادلة 18.1 نحصل على اقصى تسارع للجسم وهي

$$a_{max} = \omega^2 A = (5.00\ \text{rad/sec})^2(5.00 \times 10^{-2}\text{m}) = 1.25\ \text{m/s}^2$$

الحل (D):

سنقوم بحساب ثابت الطور phase constant من خلال استخدام الشروط الابتدائية للحركة وهي $x = A$ و $t = 0$ نحصل على

$$x(0) = A \cos \phi = A$$

وهذا يخبرنا ان $\phi = 0$. وعليه فان الحل سيكون على الشكل التالي $x = A \cos\omega t$. وباستخدام هذه المعادلة يمكن ان نجد المعادلات المطلوبة للموضع والسرعة والتسارع على النحو التالي:

$$x = A \cos \omega t = (0.0500\text{m}) \cos 5.00\, t$$

$$v = \omega A \sin \omega t = -(0.250\text{m/s}) \sin 5.00\, t$$

$$a = -\omega^2 A \cos \omega t = -(1.25\text{m/s}^2) \cos 5.00\, t$$

ماذا لو؟ اذا تم ترك الجسم ليتذبذب من نفس الموضع الابتدائي $x_i = 5.00$ cm، ولكن بسرعة إبتدائية مقدراها $v_i = -0.1$ m/s؟ أي من أجزاء الحل سوف يتغير وما هي الإجابات الجديدة لتلك التي سوف تتغير؟

الإجابة: نلاحظ هنا ان الجزء (A) من الحل لا يتأثر لان الزمن الدوري لا يعتمد على الشروط الابتدائية للحركة. أما الأجزاء (B) و (C) و (D) من الحل سوف يتغير، وذلك على النحو التالي:

بكتابة معادلة الموضع والسرعة مع الشروط الابتدائية للحركة:

$$x(0) = A\cos\phi = x_i \qquad (1)$$

$$v(0) = -\omega A\sin\phi = v_i \qquad (2)$$

بتقسيم المعادلة (2) على المعادلة (1) نحصل على ثابت الطور وهو

$$\frac{-\omega A\sin\phi}{A\cos\phi} = \frac{v_i}{x_i}$$

$$\tan\phi = -\frac{v_i}{\omega x_i} = -\frac{-0.10\text{m/s}}{(5.00\text{rad/s})(0.050\text{m})} = 0.400$$

$$\phi = tan^{-1}(0.40) = 0.121\pi$$

من المعادلة (1) يمكن ان نحسب قيمة سعة الحركة A على النحو التالي:

$$A = \frac{x_i}{\cos\phi} = \frac{0.050\text{m}}{\cos(0.12\pi)} = 0.0539\text{m}$$

نحسب اقصى سرعة في هذه الحالة

$$v_{max} = \omega A = (5.00\text{rad/s})(5.39\times10^{-2}\text{m}) = 0.269\text{ m/s}$$

نحسب أقصى تسارع يصل له الجسم في هذه الحالة

$$a_{max} = \omega^2 A = (5.00\text{rad/s})^2\,(5.39\times10^{-2}\text{m}) = 1.35\text{ m/s}^2$$

وبالتالي تكون معادلات الحركة على النحو التالي:

$$x = (0.0539\text{m})\cos(5.00\,t + 0.12\pi)$$

$$v = -(0.269\text{m/s})\sin(5.00\,t + 0.12\pi)$$

$$a = -(1.35\text{m/s}^2)\cos(5.00\,t + 0.12\pi)$$

ملاحظة: بالتأكيد يمكن الوصول لهذه الاجابات لو اعتمدنا في الحل على الطاقة كأساس للتغير في الحركة. وهذا ما سوف نقوم بدراسته في الجزء التالي من الموضوع.

3.1 طاقة الحركة التوافقية البسيطة
Energy of the simple harmonic oscillator

لنقوم الآن بحساب الطاقة الميكانيكية لنظام مكون من جسم متصل مع زنبرك كما هو موضح في الشكل 1.1. وبما ان السطح عديم الاحتكاك، فإننا نتوقع أن تكون الطاقة الميكانيكية للنظام ثابتة، نفرض أيضا إن كتلة الزنبرك مهملة، لذلك تكون الطاقة الحركية للنظام متعلقة فقط بكتلة الجسم. وباستخدام المعادلة 15.1 للتعبير عن الطاقة الحركية للجسم نحصل على:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad (1.19)$$

وطاقة الوضع المختزنة في الزنبرك لأي استطالة تحدث له تعطى بـ $\frac{1}{2}kx^2$ وباستخدام المعادلة 6.1 نحصل على ما يلي:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \qquad (1.20)$$

نلاحظ إن كلا من طاقة الحركة K وطاقة الوضع U هي كميات موجبة دائماً. لان $\omega^2 = k/m$، وبالتالي تكون الطاقة الميكانيكية للحركة التوافقية البسيطة هي

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)]$$

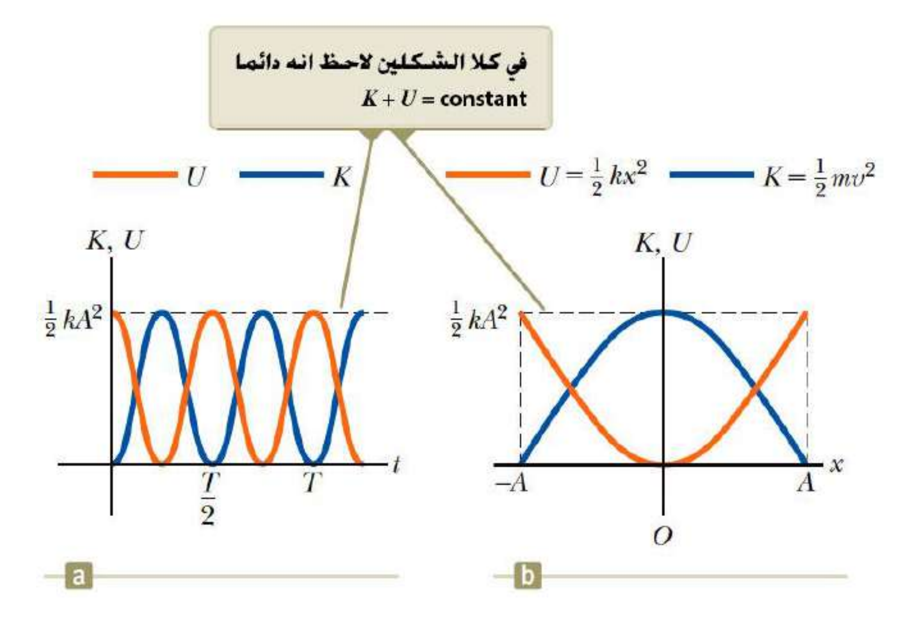
ومن المعادلة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$، فان الكمية المدرجة بين القوسين المربعين [ ] تساوي الوحدة، ولهذا فان المعادلة السابقة تصبح على النحو التالي:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \qquad (1.21)$$

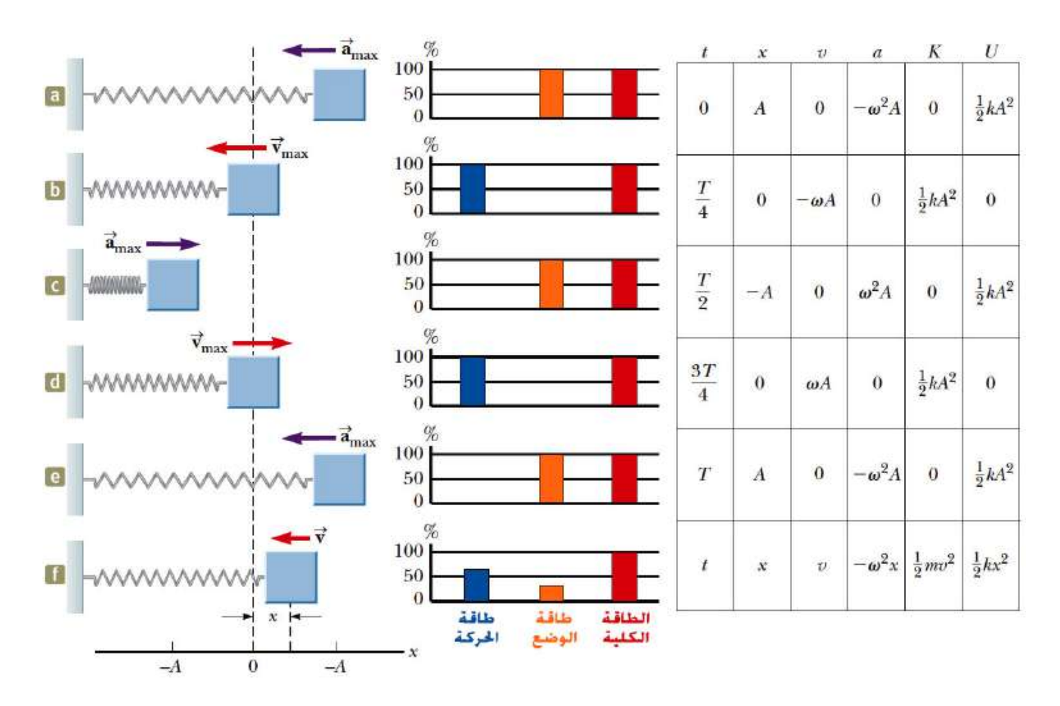
وعليه فان الطاقة الميكانيكية الكلية للحركة التوافقية البسيطة ثابتة وتتناسب طرديا مع مربع سعة التذبذب. لاحظ ان طاقة الوضع U تكون صغيرة عندما تكون طاقة الحركة K كبيرة، والعكس صحيح، وذلك لان مجموعهما دائما ثابتاً. في الحقيقة، الطاقة الميكانيكية الكلية تساوي أقصى طاقة وضع عندما $x = \pm A$ وذلك لان السرعة في هذه الحالة تساوي صفر، ولهذا لا يكون هناك طاقة حركة. عند نقطة الاتزان فإن $U = 0$ لان $x = 0$، وتكون الطاقة الكلية تساوي مرة أخرى $\frac{1}{2}kA^2$. أي إن

$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad at\ x = 0$$

برسم العلاقة بين طاقة الحركة وطاقة الوضع كدالة في الزمن كما في الشكل 10.1 a، عندما تكون قيمة $\phi = 0$. وكما ذكرنا سابقا فان كلا من طاقة الحركة وطاقة الوضع تكونان دائما موجبتين، ودائما حاصل جمعهما يساوي مقدار ثابت وهو الطاقة الكلية للنظام والذي يساوي $\frac{1}{2}kA^2$. التغيرات في الطاقة الحركية وطاقة الوضع بالنسبة لموضع الجسم x موضحة في الشكل 10.1 b.



الشكل 10.1 (a) يوضح طاقة الحركة وطاقة الوضع كدالة في الزمن للحركة التوافقية البسيطة عند $\phi = 0$. (b) يوضح طاقة الحركة وطاقة الوضع كدالة في الموضع للحركة التوافقية البسيطة. وفي كلا المنحنيين لاحظ ان $K + U$ دائما قيمة ثابتة.



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

شكل 11.1 من (a) وحتى (e) توضح لحظات زمنية مختلفة من الحركة التوافقية البسيطة لنظام مكون من جسم مرتبط في زنبرك. مخططات أعمدة الطاقة توضح توزيع الطاقة للنظام في كل لحظة. تشير المعاملات في الجدول على اليمين إلى نظام الكتلة والزنبرك، بافتراض الزمن $t = 0$، و$x = A$، وعليه فان $x = A\cos\omega t$. لهذه الحالات الخمسة احد نوعي الطاقة تكون مساوية للصفر اما. (f) عند فهي عند نقطة اختيارية في الحركة التذبذبية. حيث يكون للنظام كلا من طاقة الحركة وطاقة الوضع عند هذه اللحظة.

ان الطاقة تتحول باستمرار بين طاقة الوضع المختزنة في الزنبرك وطاقة الحركة للجسم. يوضح الشكل 11.1 الموضع والسرعة والتسارع وطاقة الحركة وطاقة الوضع للجسم والزنبرك في دورة كاملة من حركته. معظم ما قمنا بشرحه حتى الآن موضح في هذا الشكل. ولهذا يجب عليك عزيزي القارئ إن تدرسه بعناية.

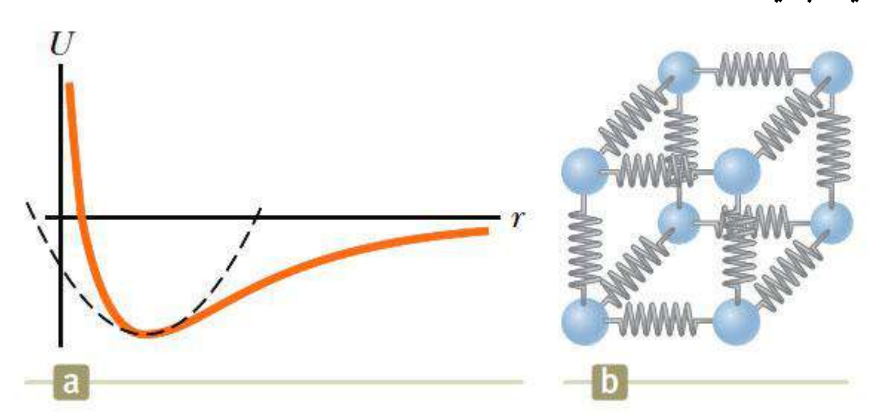
في النهاية، يمكننا استخدام مبدأ حفظ الطاقة لتعيين السرعة للجسم عند أي موضع من خلال الطاقة الكلية للنظام عند أي موضع x.

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (1.22)$$

عند فحص المعادلة 22.1 نرى إنها تتفق مع هذه الحالة، ونجد إنها تثبت حقيقة وهي إن السرعة تكون اقصى قيمة لها عند $x = 0$ وتساوي صفر عند نقطة العودة أي عند أقصى إزاحة $x = \pm A$.

بعد ان قمنا بشرح موسع للحركة التوافقية البسيطة سوف نقوم الان بتطبيق ذلك على الكثير من النماذج العملية التي تتحرك بحركة توافقية بسيطة. مثل دراسة القوة التي تربط الذرات مع بعضها ببعض. يوضح الشكل 12.1 a هذا الأمر حيث ان ازاحة بسيطة للجسم عن موضع الاتزان فان منحنى طاقة الوضع يظهر على شكل منحنى قطع ناقص، وهذا يمثل طاقة وضع متذبذب توافقي. وعليه يمكن ان نشبه القوة التي تربط الذرات مع بعضها البعض بزنبرك صغير يربط بين الذرات كما في الشكل 12.1 b. هذا بالاضافة إلى الكثير من الظواهر العملية التي يمكن ان ندرسها من خلال الحركة التوافقية البسيطة.



الشكل 12.1 (a) اذا كانت الذرات في الجزيئات لا تتحرك بعيدا عن مواضع اتزانها، فان منحنى طاقة الوضع كدالة في المسافة بين الذرات يشبه تمام منحنى طاقة الوضع كدالة في الموضع للجسم المتحرك حركة توافقية بسيطة (المنحنى الازرق). (b) القوة بين الذرات في الاجسام الصلبة يمكن تشبيهها بزنبرك يربط الذرات المتجاورة.

ان الفكرة التي تم عرضها في هذا الفصل لا تطبق فقط على أنظمة الكتلة المعلقة أو المتصلة في زنبرك والذرات ولكن تطبق أيضا على مدى واسع من الحالات الفيزيائية مثل الآلات الموسيقية والضوء المنبعث بواسطة الليزر وغيرها. سوف نتطرق لامثلة اكثر على الحركة التوافقية البسيطة خلال هذا الكتاب.

مثال 4.1 حركة اهتزازية على سطح افقي
Oscillations on a Horizontal Surface

عربة كتلتها 0.500 kg متصلة مع زنبرك (k = 20.0N/m) يتذبذب على سطح افقي عديم الاحتكاك. (A) احسب الطاقة الكلية للنظام وأقصى سرعة للعربة اذا كانت سعة الحركة 3.00cm، (B) ما هي سرعة العربة عندما تكون على بعد 2.00cm، (C) احسب كلا من طاقة الحركة وطاقة الوضع عندما تكون العربة على بعد 2.00cm.

الحل (A):

تصور المسألة: يتذبذب النظام بنفس الطريقة لتذبذب جسم كما في الشكل 10.1، لذلك استخدم الهذا الشكل في تصورك لحركة العربة.

تصنيف المسألة: ننمذج حركة العربة كجسيم في حالة حركة توافقية بسيطة.

باستخدام المعادلة 21.1، للتعبير عن الطاقة الكلية للنظام المتذبذب ومساواته مع الطاقة الحركية للنظام عندما تكون العربة عند $x = 0$ نحيث تكون طاقة الوضع في هذه الحالة مساوية للصفر وبالتالي فان الطاقة الكلية تساوي اقصى طاقة حركة أي ان:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

بالحل بالنسبة لاقصى سرعة والتعويض بالقيم العددية نحصل على ما يلي:

$$v_{max}^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{20.0\text{N}}{0.50\text{kg}}}(0{,}030\text{m}) = 0.190\text{m/s}$$

الحل (B)

باستخدام المعادلة 22.1 نحصل على ما يلي:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{20.0\mathrm{N/m}}{0.50\mathrm{kg}}[(0.030\mathrm{m})^2 - (0.020\mathrm{m})^2]}$$

$$\therefore\ v = \pm 0.141\ \mathrm{m/s}$$

الإشارة الموجبة والسالبة تدل على أن العربة ممكن أن تتحرك إلى اليمين أو إلى اليسار في تلك اللحظة.

الحل (C)

باستخدام النتائج التي حصلنا عليها في الجزء (B) لحساب طاقة الحركة وطاقة الوضع عند $x = 0.02\ m$، نجد ان

$$K = ½\, mv^2 = ½\ (0.500\ \mathrm{kg})(0.141\mathrm{m/s})^2 = 5.00\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

$$U = ½\, kx^2 = ½\ (20.0\ \mathrm{N/m})(0.0200\mathrm{m})^2 = 4.00\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

الخلاصة: لاحظ إن الطاقة الكلية E تساوي مجموع طاقتي الحركة K وطاقة الوضع U

ماذا لو؟ كانت حركة العربة في المثال بدأت عندما كانت العربة عند $x = 3.00\ \mathrm{cm}$ وبسرعة ابتدائية مقدارها $v = -\ 0.100\ \mathrm{m/s}$. ما هي سعة الحركة وما هو أقصى سرعة للعربة؟

الإجابة: لاحظ إن هذه الحالة تشبه تماماً الحالة التي ناقشناها في المثال 3.1، ولكننا هنا سوف نعتمد على الطاقة لإيجاد المطلوب. سنبدأ أولا بحساب الطاقة الكلية للنظام عند الزمن $t = 0$،

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}(0.50\text{kg})(-0.10\text{m/s})^2 + \frac{1}{2}(20.0\text{N/m})(0.30\text{m})^2$$

$$\therefore E = 1.15 \times 10^{-2}\text{J}$$

لإيجاد سعة الحركة، نقوم بمساواة الطاقة الكلية بطاقة الوضع عندما تكون العربة عند أقصى نقطة لها في الحركة

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2(1.15 \times 10^{-2}\text{J})}{20.0\text{N/m}}} = 0.0339\text{m}$$

ولإيجاد أقصى سرعة للعربة سنقوم بمساواة الطاقة الكلية مع طاقة الحركة عندما تكون العربة عند نقطة الاتزان.

$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.15 \times 10^{-2}\text{J})}{0.50\text{kg}}} = 0.214 \text{ m/s}$$

وهذه القيمة اكبر من القيمة السابقة وهذا متوقع لان العربة تمتلك في هذه الحالة سرعة ابتدائية عند الزمن $t = 0$.

4.1 مقارنة الحركة التوافقية البسيطة مع الحركة الدائرية المنتظمة
Comparing simple harmonic motion with uniform circular motion

ان الكثير من الأجهزة التي نستخدمها في حياتنا العملية تظهر علاقة بين الحركة الاهتزازية والحركة الدورانية. على سبيل المثال، اعتبر حركة ماكينة خياطة يدوية (لا تعمل بالكهرباء) كما هو موضح في الشكل 13.1. يقوم الخياط بوضع قدميه على دواسة الماكينة وتحريكها للأمام والخلف. هذه الحركة التذبذبية تتسبب في دوران العجلة الكبيرة في حركة دورانية. الحزام باللون الأحمر الموضح في الصورة يقوم بتحويل الحركة الدورانية للعجلة إلى ماكينة الخياطة (الجزء العلوي من الصورة) وينتج عنها حركة تذبذبية لابرة الخياطة للأعلى وللاسفل بحركة توافقية بسيطة. في هذا الجزء سنقوم بشرح العلاقة بين الحركة الاهتزازية والحركة الدورانية وهذه العلاقة سوف تفيدنا كثيرا في شرح العديد من الظوار الفيزيائية مثل النظرية الكهرومغناطيسية.





الشكل 13.1 في الأسفل يوجد دواسة ماكينة خياطة يدوية يعود تصنيع هذه الماكينة إلى مطلع القرن العشرين.

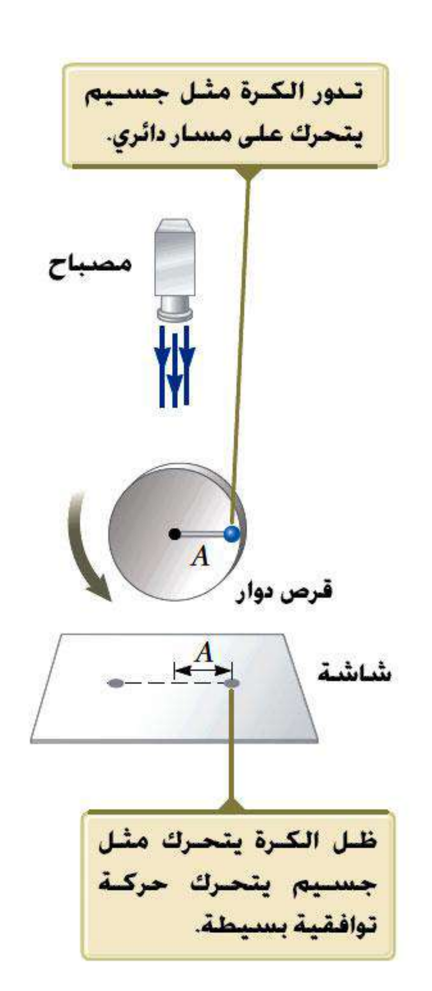
يوضح الشكل 14.1 مشهد لتجربة عملية توضع العلاقة بين الحركة الدورانية والحركة التذبذبية. في هذه التجربة تكون كرة متصلة على حافة قرص دائري نصف قطره A، هذه الكرة مضاءة بشعاع ضوء من مصباح كهربي مثبت اعلى منها. يظهر ظل الكرة على شاشة في الأسفل. مع دوران القرص تدور الكرة بسرعة زاوية ويظهر ظل الكرة على الشاشة متحركا للأمام والخلف في حركة توافقية بسيطة.

اعتبر الان جسم عند النقطة P على محيط الدائرة نصف قطرها A، كما هو موضح في الشكل 15.1 a، إذا كان الخط OP يعمل زاوية مقدارها ϕ بالنسبة لمحور x عند الزمن $t = 0$. سوف نقوم بتسمية هذه الدائرة بدائرة المرجع، وبأخذ النقطة P عند الزمن $t = 0$ كمرجع. إذا كان الجسم يتحرك على محيط الدائرة بسرعة زاوية منتظمة ω حتى يصنع الخط OP زاوية مقدارها θ مع محور x، كما في الشكل 15.1 b، عندما يكون الزمن $t > 0$، فان الزاوية بين الخط OP والمحور x هي $\theta = \omega t + \phi$. وباستمرار حركة الجسم على محيط الدائرة فان مسقط النقطة P على المحور x، فان النقطة Q، تتحرك للأمام والخلف على المحور x بين النقطتين $x = \pm A$.

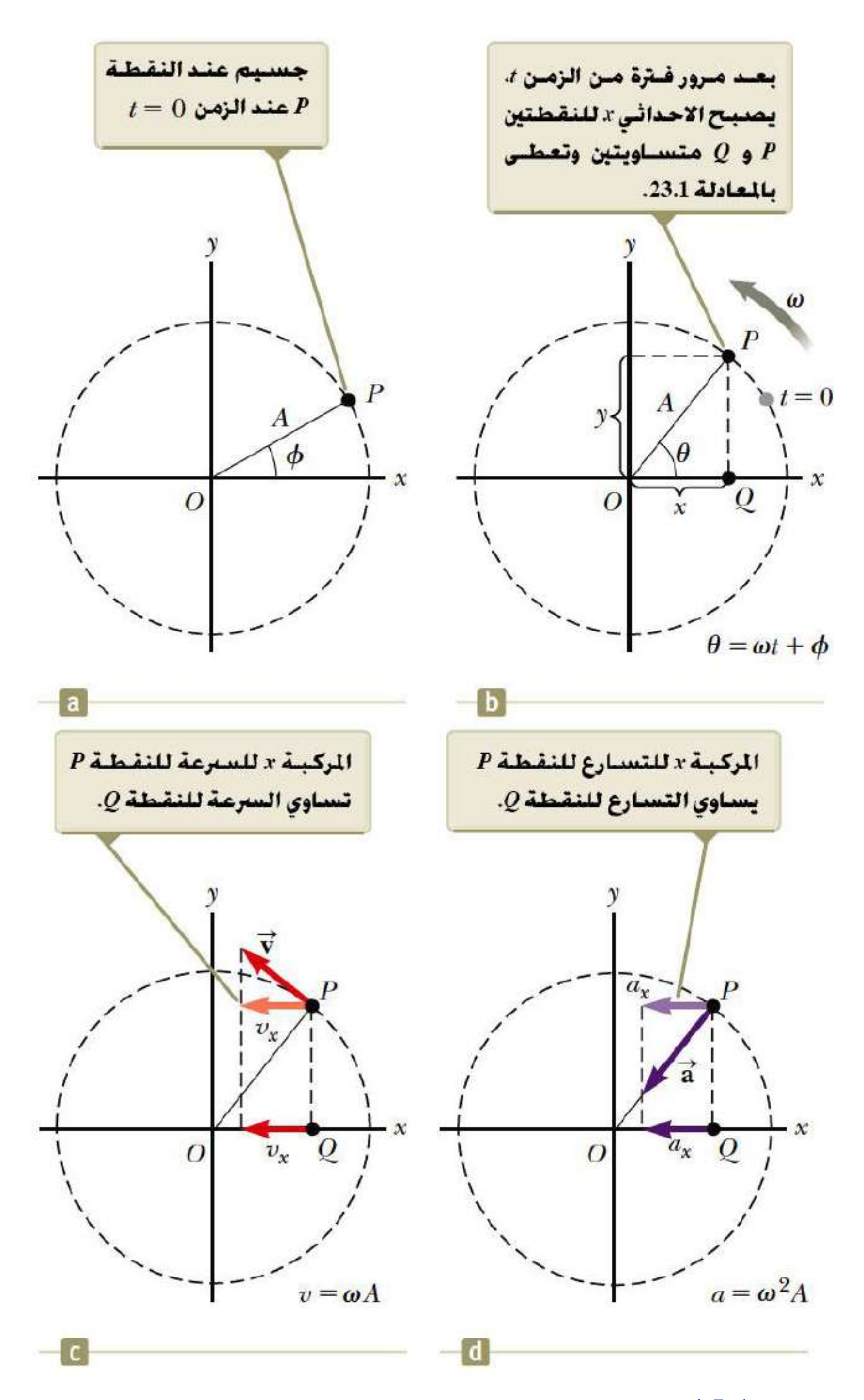
لاحظ إن النقطتين P و Q لهما دائما نفس إحداثيات النقطة x. من المثلث OPQ، نجد أن الإحداثي x هو

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (1.23)$$

هذه المعادلة هي نفسها المعادلة 6.1 التي تظهر ان النقطة Q تتحرك حركة توافقية



الشكل 14.1 يظهر مسقط رأسي لتجربة تظهر العلاقة بين الحركتين الاهتزازية والدورانية. كرة متصلة بذراع نصف قطره A يدور بانتظام، ويسقط على مستوى الدوران الأفقي شعاع ضوئي يصدر من مصباح. نستقبل ظل الكرة على شاشة. وبحركة الكرة الدورانية بسرعة زاوية منتظمة نشاهد ظلها يتحرك حركة توافقية بسيطة.



الشكل 15.1 يوضح العلاقة بين الحركة الدائرية للنقطة P والحركة التوافقية البسيطة للنقطة Q.

بسيطة على محور x، وعليه نستنتج أن الحركة التوافقية البسيطة على خط مستقيم ممكن أن نمثلها بمسقط نقطة تتحرك على مسار دائري بسرعة منتظمة.

كذلك يمكن أن نصل إلى نفس النتيجة لو اعتبرنا ان مسقط النقطة P على محور y كما هو موضح في الشكل 15.1 b. وعليه نستنتج ان الحركة الدائرية المنتظمة تعتبر كحركة مركبة من حركة توافقية بسيطة على محور x وحركة توافقية على محور y بفارق في الطور بينهما مقداره 90^o.

حيث ان العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية للحركة الدائرية هي $v = r\omega$، والجسم الذي يتحرك على محيط دائرة نصف قطرها A له سرعة مقدارها ωA. من التمثيل الهندسي في الشكل 15.1 c، فاننا نلاحظ إن المركبة x للسرعة يساوي $-\omega A\sin(\omega t + \phi)$. بالتعريف فان النقطة Q لها سرعة تعطى بـ dx/dt. باشتقاق المعادلة 23.1 بالنسبة إلى الزمن، نجد أن سرعة النقطة Q هي نفسها سرعة المركبة x للنقطة P.

اتجاه التسارع للنقطة P على محيط الدائرة هو في اتجاه مركز الدائرة O وله مقدار $v^2/A = \omega^2 A$. من الشكل الهندسي الموضح في الشكل 15.1 d، نجد أن المركبة x للتسارع يساوي $-\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$. هذه القيمة هي نفس التسارع لمسقط النقطة Q على محور x، ويمكن التحقق من ذلك من خلال المشتقة الثانية للمعادلة 23.1.

الشكل 16.1 جسم يتحرك حركة دائرية يظهر ظل الجسم على شاشة في الاسفل. موضحة موضع الجسم عند أي لحظة.

سؤال للتفكير 5.1

يوضح الشكل 16.1 موقع جسم يتحرك على مسار دائري عند الزمن $t = 0$. تم تسليط ضوء عليه من

الأعلى ويتم استقبال الظل المتكون للجسم على شاشة أسفل الحركة الدائرية. فان قيمة السعة وثابت الطور للحركة التوافقية البسيطة للظل هي (a) 0.50m و 0، (b) 1.00m و 0، (c) 0.50m و π، (d) 1.00m و π.

مثال 5.1 حركة دائرية بسرعة زاوية منتظمة
Circular Motion with Constant Angular Speed

جسم يتحرك بحركة دائرية عكس عقارب الساعة نصف قطرها 3.00 m بسرعة زاوية ثابتة مقدارها 8.00 rad/s. عند الزمن $t = 0$، يكون للجسم مركبة x تساوي 2.00 m ويتحرك الجسم إلى اليمين. (A) اوجد المركبة x كدالة في الزمن. (B) أوجد مركبة السرعة والتسارع في اتجاه المحور x عند أي لحظة من زمن.

الحل (A):

تصور المسألة: تأكد من فهمك للعلاقة بين الحركة الدائرية للكرة والحركة التوافقية البسيطة لظلها كما هو موضح في الشكل 14.1. لاحظ ان الظل لا يكون عند اقصى موضع له عند الزمن $t = 0$.

تصنيف المسألة: الكرة على القرص الدوار هو عبارة عن جسيم في حالة حركة دائرية منتظمة. ننمذج الظل كجسيم في حالة حركة توافقية بسيطة.

تحليل المسألة: باستخدام المعادلة 23.1 لكتابة صيغة للاحداثي x لحركة الكرة الدائرية:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

بالحل بالنسبة لثابت الطور نحصل على

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) - \omega t$$

بالتعويض عن القيم العددية للشروط الابتدائية نحصل على ما يلي:

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{2.00\text{m}}{3.00\text{m}}\right) - 0 = \pm 48.2^o = \pm 0.841 \text{ rad}$$

اذا اخذنا $\phi = +0.841$ rad فان الظل سوف يتحرك إلى اليسار عند الزمن $t = 0$. حيث ان الظل يتحرك إلى اليمين عند الزمن $t = 0$ فانه علينا ان نأخذ القيمة السالبة وهي $\phi = 0.841$ rad.

بكتابة الاحداثي x كدالة في الزمن نحصل على المعادلة التالية:

$$x = 3.00\text{m} \cos(8.00t - 0.841)$$

الحل (B):

باخذ المشتقة الأولى للاحداثي x بالنسبة إلى الزمن لإيجاد السرعة v_x عن أي زمن بوحدة m/s.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-3.00\text{m})(8.00\text{rad/s}) \sin(8.00t - 0.841)$$

$$\therefore\ v_x = -24.0 \sin\big(8.00t - 0.841\big)$$

باخذ المشتقة الأولى للسرعة بالنسبة إلى الزمن لايجاد التسارع a_x عند أي زمن بوحدة m/s^2.

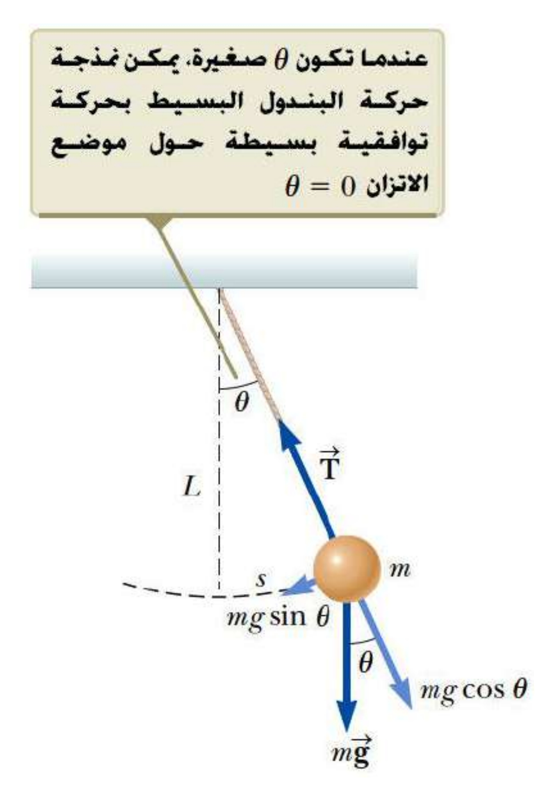
$$a_x = \frac{dv}{dt} = (-24.0\text{m/s})(8.00\text{rad/s})\sin\,(8.00t - 0.841)$$

$$\therefore\ a_x = -192 \cos(8.00t - 0.841)$$

الخلاصة: هذه النتائج متحققة بشكل متساوي للكرة التي تتحرك حركة دائرية منتظمة وحركة الظل في حركة توافقية بسيطة. لاحظ ان قيمة ثابت الطور وضعت الكرة في الربع الرابع لنظام الاحداثيات xy الموضح في الشكل 14.1، وهذا متفق مع ان الظل له قيمة موجبة لقيمة x ويتحرك ناحية اليمين.

5.1 البندول The pendulum

يعتبر البندول البسيط أحد الأنظمة الميكانيكية التي تعمل حركة دورية. يتكون البندول البسيطة من جسم كتلته m معلق بخيط طوله L في أحد طرفيه والطرف الأخر ثابت، كما هو موضح في الشكل 17.1. تحدث الحركة على المستوى الرأسي وتستمر تحت تأثير قوة الجاذبية. سوف نثبت انه عندما تكون الزاوية θ صغيرة (اقل من 10^{o})، فان حركة البندول هي حركة توافقية بسيطة.



الشكل 17.1 عندما تكون θ صغيرة، يتذبذب البندول بحركة توافقية بسيطة حول موضع الاتزان عند $\theta = 0$. القوة الاسترجاعية $-mg\sin\theta$، وهي المركبة المماسية لقوة وزن الجسم بالنسبة لمنحنى الحركة.

ان القوة المؤثرة على الجسم المعلق هي قوة الشد T التي تتولد في الخيط وقوة الجاذبية الأرضية mg. تؤثر المركبة المماسية $mg\sin\theta$ دائما في الاتجاه الذي يجعل الزاوية $\theta = 0$،

وفي عكس الإزاحة التي تحدث للجسم بالنسبة لموضع الاتزان. لهذا فان المركبة المماسية تعتبر هي القوة الاسترجاعية restoring force، ويمكننا هنا أن نطبق قانون نيوتن الثاني على الحركة في الاتجاه المماسي.

$$F_t = ma_t \qquad \rightarrow \qquad -mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

حيث ان s هي موضع الجسم مقاسا بطول القوس والإشارة السالبة تشير إلى أن القوى المماسية تشير دائما نحو نقطة الاتزان. وحيث ان $s = L\theta$ وحيث أن L ثابتة فان المعادلة السابقة تصبح على النحو التالي:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

باعتبار ان θ هي الموضع، دعنا نقارن هذه المعادلة مع المعادلة 3.1. هل تمتلك نفس الشكل الرياضي؟ يتناسب الشق الأيمن مع $\sin\theta$ وليس مع θ، وهذا قد يقودنا إلى أن نتوقع أن تكون هذه الحركة لا تخضع لقوانين الحركة التوافقية البسيطة، لان هذه المعادلة ليس لها نفس الشكل الرياضي للمعادلة 3.1. على كل حال، إذا افترضنا إن الزاوية θ صغيرة فمن الممكن أن نستفيد من التقريب $\theta \approx \sin\theta$، وعليه فان هذا التقريب سوف يجعل المعادلة على النحو التالي:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \qquad (1.24)$$

الآن اصبح لدينا معادلة حركة توافقية بسيطة مثل المعادلة 3.1، ومنها نستنتج ان حركة البندول بإزاحات صغيرة هي حركة توافقية بسيطة. وعليه يمكن أن نكتب دالة الزاوية θ بالشكل $\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi)$، حيث θ_{max} هي اكبر موضع زاوي للبندول والتردد الزاوي ω يعطى على النحو التالي:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (1.25)$$

اما الزمن الدوري فيعطى على النحو التالي:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (1.26)$$

ومن هنا نستنتج ان الزمن الدوري والتردد للبندول البسيط يعتمدان على طول الخيط وعلى عجلة الجاذبية الارضية. بما ان الزمن الدوري لا يعتمد على كتلة الجسم المعلق في البندول، نستنتج ان كل بندول بسيط له نفس الطول له نفس الزمن الدوري بالطبع اذا كانوا على الكرة الارضية تحت تأثير عجلة الجاذبية الارضية. المقارنة بين حركة الزنبرك وحركة البندول البسيط موضحة في الشكل 11.1.

يمكن ان يتسخدم البندول البسيط في تحديد الوقت لان زمنه الدوري يعتمد فقط على طول البندول وعلى عجلة الجاذبية الأرضية، كما يمكن ان يستخدم كاداة لقياس عجلة الجاذبية الأرضية، وهذه القياسات مهمة جداً لرصد التغيرات في عجلة الجاذبية الأرضية في مناطق مختلفة على سطح الكرة الأرضية وربما تساعد هذه القياسات في التنقيب عن النفط في بعض الاحيان.

سؤال للتفكير 6.1

ساعة قديمة تعتمد في عملها على البندول البسيطة، (i) افترض انه تم ضبط الساعة بدقة، ومن ثم قام شخص ما وسحب الجسم المعلق ببندول الساعة للاسفل. هل تتوقع ان يتحرك البندول (a) أبطء، (b) أسرع (c) لا يحدث تغير؟ (ii) افترض إن الساعة في السؤال السابق تم ضبطها بدقة على مستوى سطح البحر ومن ثم تم أخذها إلى مكان مرتفع كقمة جبل هل تتوقع أن يتحرك البندول (a) أبطء، (b) أسرع (c) لا يحدث تغير؟

مثال 6.1 الربط بين الزمن والطول A Connection Between Length and Time

اقترح العالم كريستيان هيجنز Christian Huygens (1629-1695) اشهر صانع ساعات في العالم، وحدة للطول تعتمد على فكرة عمل البندول البسيط وهي طول البندول الذي له زمن دوري يساوي 1s . فكم يبلغ طول هذه الوحدة بالنسبة للمتر؟

الحل:

تصور المسألة: تخيل بندول يتأرجح إلى الامام وإلى الخلف في فترة زمنية دورية تساوي 1s بالضبط. بالاعتماد على خبرتك في ملاحظة الاجسام المتأرجحة هل يمكنك ان تخمن الطول المطلوب؟ علق جسم صغير بخيط وحاول ان تحصل على بندول زمنه الدوري يساوي 1s.

تصنيف المسألة: يتضمن هذا المثال على بندول بسيط، لذلك فاننا نصنف هذا المثال على انه تطبيق على المبادئ التي تعلمناها في هذا الفصل.

تحليل المسألة: حل المعادلة 26.3 للطول وعوض عن القيم العددية:

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1.00\text{s})^2(9.8\text{m/s}^2)}{4\pi^2} = 0.248\text{m}$$

الخلاصة: يكون طول المتر اقل قليلا من ربع طوله الحالي.

ماذا لو؟ ماذا لو كان العالم هيجنز Huygens قد ولد في كوكب أخر غير الأرض؟ما هي قيمة g لهذا الكوكب بحيث ان المتر المعتمد على بندول هيجنز وهل سيكون له نفس قيمة المتر المعروف لنا؟

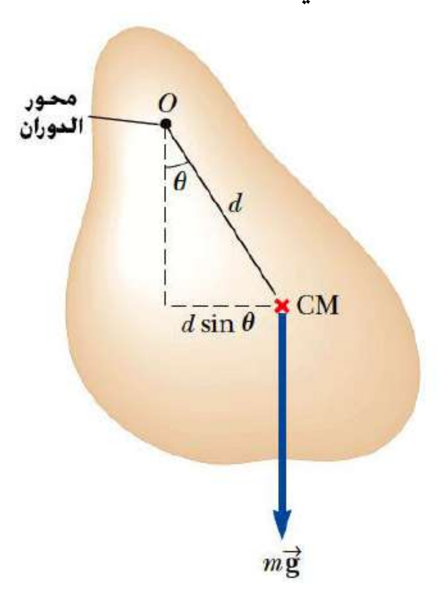
الإجابة: بحل المعادلة 26.1 بالنسبة إلى g على النحو التالي:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2(1.00\text{m})}{(1.00\text{s})^2} = 4\pi^2\text{m/s}^2 = 39.5\text{m/s}^2$$

لا يوجد أي كوكب في المجموع الشمسية له هذه القيمة الكبيرة من عجلة الجاذبية الأرضية.

البندول الطبيعي Physical Pendulum

افترض انك قمت بموازنة حمالة ملابس معلق بها جاكيت بواسطة إصبع السبابة. فإذا ما قمت بإعطاء الجسم المتزن إزاحة زاوية صغيرة. فان الجسم المعلق سوف يتذبذب. وإذا كان الجسم المعلق يتذبذب حول محور لا يمر بمركز الثقل وان الجسم لا يمكن وصفه بجسم نقطي فإننا لا نستطيع ان نتعامل معه على انه بندول بسيط. في هذه الحالة يسمى هذا البندول بالبندول الطبيعي physical pendulum.



الشكل 18.1 بندول طبيعي معلق عند النقطة O

اعتبر محور جسم صلب عند النقطة O (Pivot) على مسافة d من مركز كتلة الجسم كما في الشكل 18.1. تسبب قوة الجاذبية الأرضية ازدواج torque على محور الجسم عبر

النقطة O، ومقدار هذا الازدواج هو $mgd\ \sin\theta$ حيث θ موضحة في الشكل 18.1، باستخدام قانون نيوتن الثاني للدوران $\Sigma\tau = I\alpha$، حيث ان I عي عزم القصور الذاتي moment of inertia على محور الجسم عبر النقطة O، نحصل على،

$$-mgd \sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

تشير الاشارة السالبة إلى ان الازدواج المؤثر على النقطة O يعمل على تقليل الزاوية θ. أي ان، قوة الجاذبية الأرضية تنتج قوة استرجاعية في صورة قوة ازدواج. فاذا ما افترضنا ان الزاوية θ صغيرة، فانه يمكن ان نطبق التقريب $\sin\theta \approx \theta$، وعليه تكون معادلة الحركة على النحو التالي:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2\theta \qquad (1.27)$$

حيث ان هذه المعادلة تشبه المعادلة 3.1، فإنها تكون معادلة حركة توافقية بسيطة. وحل المعادلة 27.1 هو $\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi)$، حيث ان θ_{max} تعبر عن أقصى إزاحة زاوية وعليه فان

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

ويكون الزمن الدوري على النحو التالي:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (1.28)$$

من الممكن أن نستخدم هذه المعادلة في قياس عزم القصور الذاتي للجسم الصلب. إذا كان موقع مركز الكتلة والمسافة d معروفتين يمكن ان نحسب عزم القصور عملياً من خلال قياس الزمن الدوري للجسم. وفي النهاية، لاحظ ان المعادلة 28.1 تختصر إلى الزمن الدوري للبندول البسيط (المعادلة 26.1) عندما تكون $I = md^2$ أي عندما تكون الكتلة مركزة في مركز ثقل الجسم.

مثال 7.1 ساق يتأرجح A Swinging Rod

ساق منتظم كتلته M وطوله L معلق من احد طرفيه والطرف الأخر ترك ليتذبذب على مستوى أفقي كما هو موضح في الشكل 19.1. اوجد مقدار الزمن الدوري للحركة إذا كانت سعة الحركة صغيرة.

الحل:

تصور المسألة: تخيل ساق يتأرجح للامام والخلف عندما يعلق من طرفه. حاول ان تقوم بذلك باستخدام مسطرة

تحليل المسألة: من معلوماتنا سابقة نعرف إن عزم القصور الذاتي للساق هو $1/3ML^2$. المسافة d من مركز التعليق إلى مركز الثقل هي $L/2$. بالتعويض عن هذه المعلومات في المعادلة 28.1 نحصل على

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg(L/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

الشكل 19.1 يمثل بندول طبيعي مكون من ساق يتذبذب حول نقطة ارتكازه d و $I = 1/3\ ML^2$ و $d = L/2$

الخلاصة: عند هبوط مكوك فضائي على سطح القمر، قام رجل فضاء بالمشي على سطح القمر وكان حزامه يتدلى من بدلته، وتذبذب الحزام كبندول فيزيائي . باحث على الأرض لاحظ هذه الحركة على جهاز التلفزيون واستخدمه لتقدير تسارع السقوط الحر على القمر. كيف قام الباحث على الأرض بهذه الحسابات؟

بندول اللي Torsional Pendulum

يوضح الشكل 20.1 جسم صلب معلق بسلك مثبت من الأعلى بدعامة ثابتة. عندما لف الجسم بزاوية θ، فان السلك الملتوي يبذل على الجسم قوة ازدواج استرجاعية تتناسب طرديا مع زاوية اللي وعليه فان الازدواج τ يعطى على النحو التالي:

$$\tau = -\kappa\theta$$

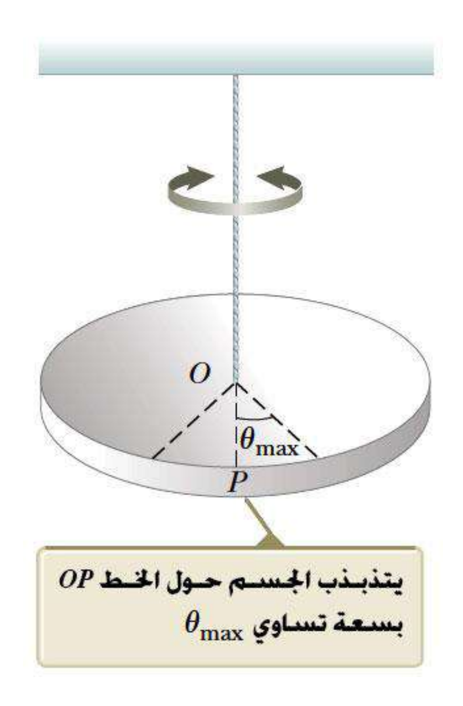
حيث κ هي ثابت اللي torsion constant للسلك. قيمة κ تحسب عن طريق تطبيق ازدواج معين على السلك وقياس الزاوية θ. بتطبيق قانون نيوتن الثاني للحركة الدوارنية نحصل على:

$$\tau = -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta \qquad (1.29)$$

مرة أخرى، نجد ان هذه معادلة هي معادلة حركة توافقية بسيطة تتذبذب بتردد زاوي مقداره $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ والزمن الدوري هو

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \qquad (1.29)$$

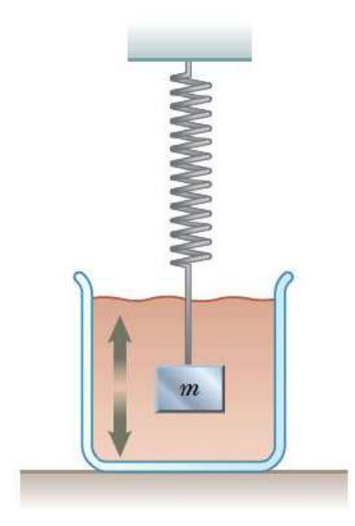


الشكل 19.1 يمثل بندول طبيعي مكون من ساق يتذبذب حول نقطة ارتكازه $d = L/2$ و $I = 1/3\ ML^2$

وهذا يدعى بندول اللي torsional pendulum. وهنا لا يوجد قيد على قيمة زاوية اللي طالما ان السلك لازال في حد الليونة elastic limit المسموح بها.

6.1 الاهتزازات المخمدة Damped oscillations

الحركة الاهتزازية التي درسنها حتى الآن هي حركة اهتزازية لنظام مثالي حيث إن النظام يستمر في التذبذب إلى مالا نهاية تحت تأثير قوة واحدة هي القوة الاسترجاعية. ولكن في الأنظمة الحقيقية فان قوى غير محافظة مثل قوة الاحتكاك يكون لها تأثير أيضا ولم يتم اخذها في الحسبان عند دراسة الأنظمة الاهتزازية المثالية. ولهذا فان الطاقة الميكانيكية للنظام تضمحل مع مرور الزمن، ونقول عن هذه الحركة بأنها حركة مخمدة damped. يوضح الشكل 21.1 يظهر جسم معلق بزنبرك وفي نفس الوقت كان الجسم مغمورا في سائل.

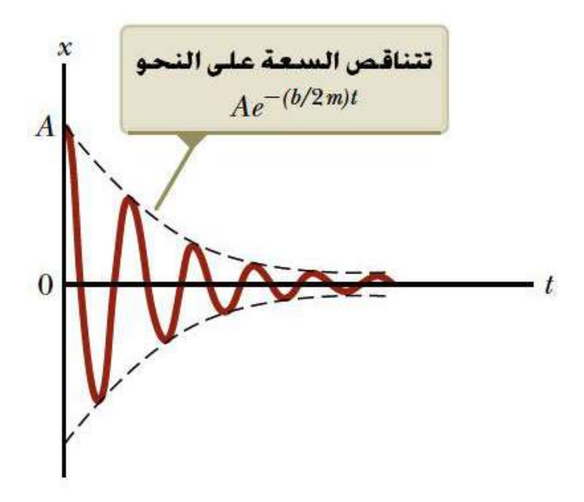


الشكل 21.1 من الامثلة على الحركة الاهتزازية المخمدة جسم معلق في زنبرك مغمور في سائل.

من أنواع الحركة المخمدة حركة سقوط جسم في سائل حيث تتولد في السائل قوة مضادة تعمل على تقليل سرعة الجسم وتتناسب القوة المضادة مع سرعة الجسم واتجاه القوة يكون في عكس اتجاه الحركة. يمكننا التعبير عن هذه القوة المضادة على إنها $\vec{R} = -b\vec{v}$ (حيث b ثابت يعرف بمعامل الإخماد damping coefficient) والقوة الاسترجاعية للنظام هي $-kx$، من الممكن الآن أن نطبق قانون نيوتن الثاني على النحو التالي:

$$\sum F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1.31)$$



الشكل 22.1 يوضح منحنى تغير الموضع بالنسبة للزمن لمتذبذب مخمد. لاحظ النقصان في سعة الحركة مع الزمن.

يتطلب حل المعادلة مهارات معينة في الرياضيات قد لا تكون مألوفة لك في هذه المرحلة، ولكن من الممكن أن نبسط الحالة هنا بدون الحاجة إلى إثبات. عندما تكون القوة المضادة صغيرة بالنسبة إلى القوة الاسترجاعية وهذا يتحقق عندما تكون b صغيرة ويكون الحل للمعادلة 31.1 هو

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi) \qquad (1.32)$$

حيث إن التردد الزاوي يتذبذب بـ

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad (1.33)$$

من الممكن أن نتحقق من هذه النتيجة بتعويض المعادلة 32.1 في المعادلة 32.1.

يوضح الشكل 22.1 موقع الجسم كدالة في الزمن عندما يتحرك الجسم حركة تذبذبية في وجود قوة مضادة. وكما هو موضح في الشكل عندما تكون القوة المضادة صغيرة، نجد ان خصائص الحركة الاهتزازية تبقى بدون تغير ولكن سعة الحركة تتناقص مع الزمن، وتكون النتيجة ان تتوقف الحركة في النهاية. ان أي نظام تكون حركته لها نفس

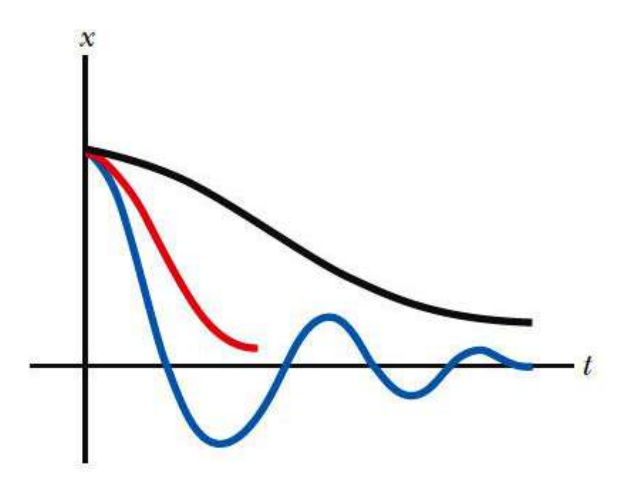
هذا السلوك فانها تعرف باسم الحركة الاهتزازية المخمدة damped oscillator. اما الخط الازرق المتقطع في الشكل 22.1، يوضح التغير في سعة الحركة (يعرف بغلاف سعة الحركة envelope) والممثل بدالة اسية موضحة في المعادلة 32.1. يوضح المنحنى اضمحلال السعة بدالة أسية مع الزمن. ويكون اضمحلال الحركة أكبر ما يمكن عندما تصبح القوة المضادة تساوي القوة الاسترجاعية.

من المناسب أن نستخدم التردد الزاوي (المعادلة 33.1) للحركة المخمدة على النحو التالي:

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

حيث ان $\omega_o = \sqrt{k/m}$ وهي تمثل التردد الزاوي في حالة غياب القوة المضادة (أي الحركة الغير مخمدة) وتعرف باسم التردد الطبيعي للنظام natural frequency.

عندما يكون مقدار القوة المضادة صغيرا بحيث ان $b/2m < \omega_o$، فاننا نقول على النظام بانه في حالة تعرف باسم تحت حد الاخماد underdamped وفي هذه الحالة تمثل الحركة الناتجة كما هو موضح بالمنحنى الازرق في الشكل 23.1. مع زيادة قيمة معامل الاخماد b فإن سعة الاهتزازات تتناقص بسرعة أكبر. عندما تصل قيمة b إلى قيمة حرجة b_c بحيث ان $b_c/2m = \omega_o$، فان النظام في هذه الحالة لا يقوم بأي اهتزازات وتسمى هذه الحالة بالاخماد الحرج critically damped. وعند الاخماد الحرج فإن النظام لا يظهر حركة اهتزازية انما يتحرك النظام في اتجاه نقطة الاتزان ويتوقف عن الحركة ولا يمكن ان يتجاوز نقطة الاتزان، وهذه الحالة موضحه بالمنحنى الاحمر في الشكل 23.1.



الشكل 23.1 يوضح منحنيات لتغير الموضع مع الزمن في عدة حالات هي (a) حالة تحت حد الاخماد، و(b) حالة الاخماد الحرج، و(c) حالة فوق حد الاخماد.

إذا كانت لزوجة الوسط عالية بحيث ان القوة المضادة اكبر من القوة الاسترجاعية أي ان $b/2m > \omega_0$ فان النظام في هذه الحالة يكون فوق حد الاخماد overdamped. وهنا اذا اعطي للنظام ازاحة فانه لا يتذبذب انما يعود إلى نقطة الاتزان. وكلما زاد الاخماد، فإن الزمن اللازم للنظام لكي يعود الى نقطة الاتزان تزداد، وهذا موضح في المنحنى باللون الاسود في الشكل 23.1. في حالة الأنظمة عند الاخماد الحرج وفي حالة الانظمة فوق الاخماد فانه لا يوجد تردد زاوي ω ويكون الحل في المعادلة 32.1 غير متحققة.

7.1 الاهتزازات القسرية Forced oscillations

لاحظنا ان الطاقة الميكانيكية للمتذبذب المتعرض للإخماد تتناقص مع الزمن نتيجة للقوة المضادة. ومن الممكن ان نستخدم قوة خارجية تبذل شغلا موجبا لتعويض الفقد في طاقة النظام. في أي لحظة يمكن ان تنتقل الطاقة إلى النظام من خلال تطبيق قوة تعمل في نفس اتجاه حركة الجسم المتذبذب وتسمى الحركة في هذه الحالة بالحركة الاهتزازية القسرية. على سبيل المثال، يمكن جعل الأرجوحة تستمر في الحركة

بإعطائها دفعة صغيرة كل دورة. وبالنسبة لسعة الحركة فإنها تبقى ثابتة إذا كانت الطاقة المعطاة في كل دورة تساوي مقدار النقص في الطاقة المفقودة نتيجة لتأثير الإخماد.

ومن الأمثلة الشائعة على الحركة القسرية هو المتذبذب المخمد الذي يؤثر عليه قوة خارجية تتغير دوريا مع الزمن، على النحو $F(t) = F_o \sin\omega t$ حيث ان ω هي التردد الزاوي للقوة الخارجية، وF_o ثابت. وبصفة عامة، فان التردد ω للقوة الخارجية تكون متغيرة بينما يكون التردد الطبيعي ω_o للمتذبذب ثابتا من خلال قيمة k وm. وبتطبيق قانون نيوتن الثاني على هذه الحالة نحصل على

$$\sum F = ma \quad \rightarrow \quad F_o \sin\omega t - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1.34)$$

مرة اخرى فان حل هذه المعادلة طويل ولن نقوم بسرده هنا. وسنكتفي بالناتج فقط لتوضيح المفهوم الفيزيائي له. بعد ان تقوم القوة الخارجية بالتأثير على جسم ساكن فان الجسم يبدأ بالحركة، وتزداد سعة الحركة تباعاً. وبعد فترة طويلة من الزمن، عندما تصبح الطاقة الداخلة على النظام من القوة الخارجية في كل دورة تساوي قيمة الطاقة الميكانيكية المتحولة لطاقة داخلية في كل دورة، فإن حالة استقرار steady state سوف تظهر على الحركة في صورة ثبات سعة الحركة. وفي هذه الحالة، فإن المعادلة 34.1 يكون لها الحل التالي:

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (1.35)$$

حيث ان

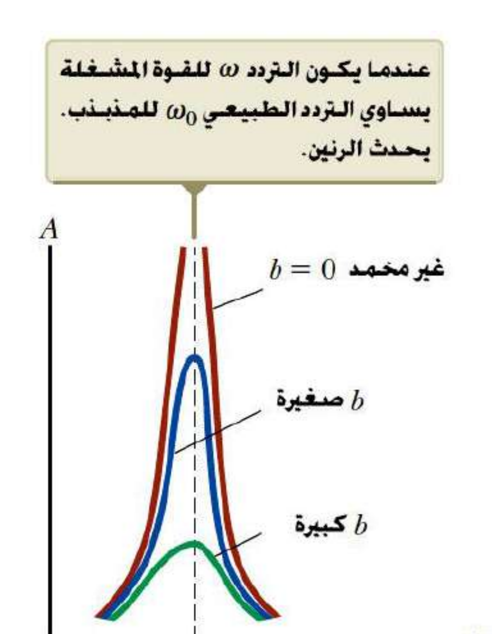
$$A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \qquad (1.36)$$

حيث ان $\omega_o = \sqrt{k/m}$ هو التردد الطبيعي للمتذبذب الغير مخمد عندما تكون $b = 0$.

توضح المعادلتين 35.1 و36.1 ان المتذبذب القسري يتذبذب بتردد القوة الخارجية وسعة المتذبذب تكون ثابتة لكل قيمة محددة للقوة الخارجية لأنها تعمل في حالة الاستقرار. لقيم إخماد صغيرة، فان السعة تكون كبيرة عندما يكون تردد القوة الخارجية

قريبا من التردد الطبيعي للمتذبذب، أو عندما تكون $\omega_0 \cong \omega$. أما في حالة الزيادة الكبيرة في السعة عند التردد الطبيعي فان هذا يعرف باسم الرنين resonance، والتردد الطبيعي ω_0 يعرف باسم تردد الرنين resonance frequency للنظام.

اما السبب في الزيادة الكبيرة لسعة الحركة عند التردد الرنيني فانه يعود الى ان الطاقة تتحول إلى النظام في افضل شروطها. ويمكن ان نفهم هذه النقطة من خلال اخذ مشتقة x في المعادلة 35.1، لنحصل على معادلة سرعة المتذبذب. نجد ان السرعة v تتناسب طردياً مع $\sin(\omega t + \phi)$، حيث انها نفس المعادلة التي تصف القوة الخارجية. ولهذا فان القوة الخارجية المطبقة $\vec{F}$ تكون في نفس طور السرعة. وعليه فإن معدل بذل الشغل على المتذبذب بواسطة القوة $\vec{F}$ يساوي حاصل الضرب القياسي لـ $\vec{F}.\vec{v}$، وهذا هو معدل اعطاء القدرة الميكانيكية للجسم المتذبذب. حيث ان حاصل ضرب $\vec{F}.\vec{v}$ يكون قيمة عظمى عندما تكون كلا من $\vec{F}$ و $\vec{v}$ في نفس الطور، فاننا نستنتج من ذلك انه عند الرنين فان القوة الخارجية في نفس طور السرعة وان الطاقة المتحولة للمتذبذب تكون في أقصى قيمة.

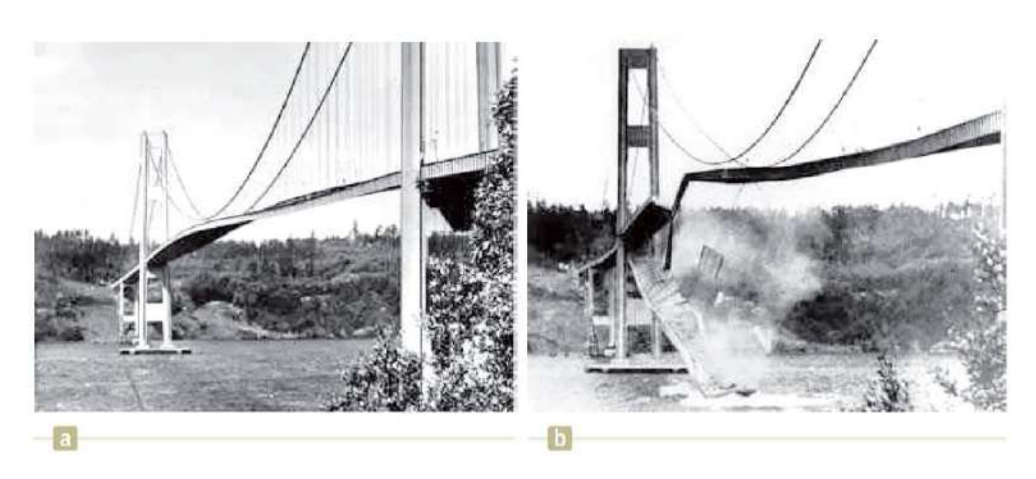


الشكل 24.1 منحنى السعة كدالة في التردد لمذبذب مخمد في حالة وجود قوة خارجية دورية. لاحظ ان شكل منحنى الرنين يعتمد على حجم معامل الاخماد b.

يوضح الشكل 24.1 منحنى السعة كدالة في التردد للمتذبذب القسري بوجود وعدم وجود اخماد. لاحظ ان السعة تزداد بنقصان الاخماد ($b \rightarrow 0$) ومنحنى الرنين يتسع بزيادة الاخماد. وفي حالة الاستقرار وعند أي تردد للقوة الخارجية فان الطاقة المتحولة للنظام تساوي الطاقة

المفقودة بسبب وجود الاخماد، وعليه فان متوسط الطاقة الكلية للحركة يبقى ثابت. في حالة عدم وجود قوة الاخماد ($b = 0$)، فانه من المعادلة 36.1 نرى ان السعة في حالة الاستقرار تصل الى ملا نهاية عندما تؤول ω إلى ω_0. بمعنى اخر، اذا لم يكن هناك فقد في النظام واذا استمرت القوة الخارجية بالتأثير على النظام نفس طور سرعة حركة الجسم فان سعة الحركة سوف تستمر في الزيادة (انظر المنحنى باللون الأحمر في الشكل 24.1). ولكن في الحقيقة هذا لا يحدث لانه دائما يكون هناك اخماد.

في دروس لاحقة من هذا الكتاب سوف نكتشف المزيد عن ظاهرة الرنين والتي تحدث في ظواهر مختلفة في الفيزياء. هذا بالاضافة إلى ان العديد من الدوائر الكهربية لها تردد طبيعي، كذلك الجسور أيضا لها ترددات طبيعية، ومن أمثلة الرنين أيضا الحادثة المروعة التي حدثت في العام 1940، عندما تعرض جسر Tacoma Narrows Bridge في واشنطن بالولايات المتحدة للدمار نتيجة للتردد الرنيني كما هو موضح في الشكل 25.1، وحدث ذلك بسبب قوة الرياح والتي هي في العادة لا تكون قوية لتدمير جسر ولكن عندما تعمل قوة الرياح بتردد يساوي التردد الطبيعي للجسر فإن النتيجة تكون كبيرة جدا وقد تبين لاحقا ان هناك خلل في تصميم الجسر حيث لم تراعى شروط السلامة والأمان.



الشكل 25.1 (a) في العام 1940 حدث اعصار قوي احداث اهتزاز في جسر Tacoma Narrows Bridge، سبب اهتزاز الجسر بتردد قريب من تردده الطبيعي. (b) بمجرد ان حدث الرنين تحطم الجسر.

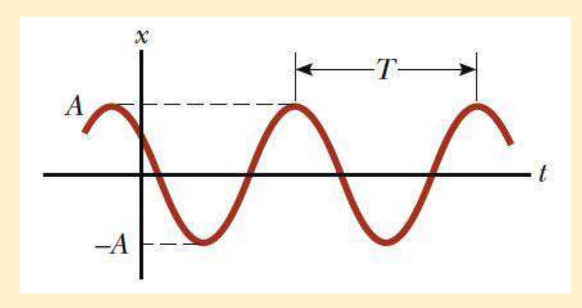
الكثير من الأمثلة الأخرى للتذبذب الرنين مثل كسر بعض الأدوات عندما تعمل على تردد يعادل التردد الرنيني، أو في حالة المشي العسكري لفريق من الجيش على جسر قد يتسبب انهياره. وفي النهاية فان ظاهرة الرنين تحدث لأي نظام حقيق يعمل عند تردد قريب من تردده الطبيعي فإننا نتوقع أن يكون هناك اهتزاز بسعة كبيرة.

مبادئ وتعريفات Concepts and Principles

- عندما يكون التسارع الذي يتحرك به جسم ما يتناسب طرديا مع الإزاحة وفي الاتجاه المعاكس من نقطة الاتزان، فان الجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة. يتغير موضع الجسم x بدالة دورية مع الزمن حسب المعادلة التالية:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (1.6)$$

حيث A هي سعة الحركة، وω هي التردد الزاوي، وϕ ثابت الطور. تعتمد قيمة ϕ على الموضع الابتدائي والسرعة الابتدائية.



- الفترة الزمنية T اللازمة لإكمال دورة كاملة تعرف باسم الزمن الدوري للحركة:

$$T = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \qquad (1.10)$$

في نظام الكتلة والزنبرك الذي يتحرك حركة توافقية بسيطة على سطح عديم الاحتكاك فان زمنه الدوري

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (1.13)$$

ومقلوب الزمن الدوري هو التردد والذي يساوي عدد الاهتزازات في الثانية.

– السرعة والتسارع للحركة التوافقية البسيطة تعطى بالمعادلات التالية:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \qquad (1.15)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \qquad (1.16)$$

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (1.22)$$

لهذا، فان أقصى سرعة هي ωA، وأقصى تسارع $\omega^2 A$. وتكون السرعة تساوي صفر عند نقاط تغير اتجاه السرعة أي عند $x = \pm A$ وتكون اكبر ما يمكن عندما يكون المتذبذب عند نقطة الاتزان $x = 0$. وقيمة التسارع تكون أقصى ما يمكن عند نقاط التحول وتكون صفر عند نقطة الاتزان.

– الطاقة الحركية وطاقة الوضع للحركة التوافقية البسيطة تتغير مع الزمن حسب المعادلتين التاليتين:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad (1.19)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \qquad (1.20)$$

والطاقة الكلية للحركة التوافقية البسيطة ثابتة وتعطى بالعلاقة التالية:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \qquad (1.21)$$

تكون طاقة الوضع اكبر ما يمكن عندما يكون الجسم المتذبذب عند نقطة التحول وتكون صفر عندما يكون الجسم المتذبذب عند نقطة الاتزان. وتكون طاقة الحركة مساوية للصفر عند نقطة التحول وتكون في اقصى قيمة لها عند نقطة الاتزان.

- البندول البسيط طوله L يتحرك حركة توافقية بسيطة بزمن دوري يساوي

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (1.26)$$

والبندول الطبيعي الذي يزاح بزاوية صغيرة عن المحور الرأسي يتحرك حركة توافقية بسيطة حول نقطة ارتكازه اذا كانت لا تمر عبر مركز الكتلة. والزمن الدوري يعطي بالمعادلة التالية:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (1.28)$$

حيث I هو عزم القصور الذاتي وd المسافة بين محور الحركة ومركز الثقل.

إذا كان المتذبذب يتعرض لقوة إخماد صغيرة $R = -bv$، فان موضع الجسم يعطى بالمعادلة

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi) \qquad (1.32)$$

حيث ان

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad (1.33)$$

اذا كان المتذبذب يتعرض لقوة خارجية $F(t) = F_0 \sin\omega t$، فانه سوف يتعرض لرنين، بحيث تصبح سعة الحركة كبيرة عندما يكون تردد القوة الخارجية يعادل التردد الطبيعي للمتذبذب.

مسائل موضوعية Objective Questions

1. موضع جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة يعطى بالمعادلة $x = 4 \cos (6\pi t)$ حيث ان x بوحدة المتر وt بوحدة الثانية. ما هو الزمن الدوري للنظام المتذبذب؟ (a) 4 s (b) 1/6 s (c) 1/3 s (d) 6π s (e) من المستحيل ان نحدد من هذه المعلومات.

2. اي من الجمل التالية غير صحيحا بالنسبة لنظام الكتلة المتصلة مع زنبرك الذي يتحرك حركة توافقية بسيطة في غياب الاحتكاك؟ (a) الطاقة الكلية للنظام تبقى ثابتة. (b) الطاقة للنظام تتحول باستمرار بين طاقة حركية وطاقة وضع. (c) الطاقة الكلية للنظام تتناسب طرديا مع مربع السعة. (d) تختزن طاقة الوضع في النظام وتكون اكبر ما يمكن عندما تمر الكتلة خلال نقطة الاتزان. (e) سرعة الكتلة المتذبذبة تمتلك اقصى قيمة لها عندما تمر الكتلة خلال موضع الاتزان.

3. نظام مكون من كتلة متصلة مع زنبرك تتحرك افقيا على سطح عديم الاحتكاك وسعة الحركة تساوي 6.0 cm وتمتلك طاقة مقدارها 12 J. اذا استبدلت الكتلة بكتلة اخرى تساوي مرتين الكتلة الاولى وبقيت سعة الحركة 6.0 cm، ما هي الطاقة الكلية للنظام؟ (a) 12 J (b) 24 J (c) 6 J (d) 48 J (e) لا احد من هذه الاجابات.

4. اذا كانت كتلة جسم هي m متصلا مع زنبرك خفيف قد استبدلت بكتلة اخرى مقدارها 9 m، تغير تردد النظام المتذبذب بمعامل؟ (a) 1/9 (b) 1/3 (c) 3.0 (d) 9.0 (e) 6.0.

5. جسم كتلته 0.40 kg معلق في زنبرك ثابته يساوي 8.0 N/m، وكان يتذبذب للاعلى وللاسفل بحركة توافقية بسيطة. ما هو مقدار التسارع للجسم عندما كانت اقصى ازاحة له تساوي 0.10 m؟ (a) صفر (b) $0.45\ m/s^2$ (c) $1.0\ m/s^2$ (d) $2.0\ m/s^2$ (e) $2.4\ m/s^2$.

6. اذا كانت سعة حركة توافقية بسيطة صغيرة وتضاعف الطول، ماذا يحدث لتردد الحركة؟ (a) يتضاعف (b) يصبح $\sqrt{2}$ مرة (c) يصبح نصف قيمته (d) يصبح $1/\sqrt{2}$ مرة (e) يبقى كما هو.

7. يتحرك نظام مكون من جسم متصل بزنبرك بحركة توافقية بسيطة بسعة حركة مقدارها A. عندما كانت طاقة الحركة تساوي مرتين طاقة الوضع المختزنة في الزنبرك، ما هو الموضع x للجسم؟ (a) A (b) $1/3\ A$ (c) $A/\sqrt{3}$ (d) 0 (e) لا احد من الاجابات السابقة.

8. جسيم على زنبرك يتحرك بحركة توافقية بسيطة على امتداد محور x بين نقطتي تحول عند $x_1 = 100$ cm و $x_2 = 140$ cm. (i) عند اي من المواضع التالية يمتلك الجسيم اقصى سرعة؟ (a) 100 cm (b) 110 cm (c) 120 cm (d) لا احد من هذه المواضع. (ii) عند اي موضع يكون تسارع الجسم اقصى ما يمكن؟ اختر من نفس الاجابات في الجزء (i). (iii) عند اي موضع تكون القوة الكلية المؤثرة على الجسيم اكبر ما يمكن؟ اختر من نفس الاجابات في الجزء (i).

9. نظام مكون من جسم متصلة مع زنبرك يتحرك حركة توافقية بسيطة على امتداد محور x بين نقطتي تحول عند $x_1 = 20$ cm و $x_2 = 60$ cm. للأجزاء من (i) إلى (iii) اختر من الاجابات المتاحة. (i) عند اي موضع يكون للجسم اقصى مقدار لكمية الحركة؟ (a) 20 cm (b) 30 cm (c) 40 cm (d) موضع ما اخر (e) اقصى قيمة تحدث عند عدة نقاط. (ii) عند اي موضع يكون للجسم اقصى طاقة حركة؟ (iii) عند اي موضع يكون للنظام المكون من الجسم والزنبرك اقصى طاقة كلية؟

10. لحركة توافقية بسيطة اجب بنعم او لا على الاسئلة التالية. (a) هل لكلا من الموضع والسرعة نفس الاشارة؟ (b) هل لكلا من السرعة والتسارع نفس الاشارة؟ (c) هل كلا من الموضع والتسارع نفس الاشارة؟

11. اذا قمت بتوصيل جسم في اسفل زنبرك معلق رأسيا. اذا قمت ببطء بترك الجسم يتحرك بحريته إلى الاسفل وقطع مسافة مقدارها 15.0 cm من نقطة الاتزان. ثم قمت برفع الجسم إلى موضعه الابتدائي وترك من السكون. ما هي اقصى مسافة يتحركها للإسفل؟ (a) 7.5 cm (b) 15.0 cm (c) 30.0 cm (d) 60.0 cm (e) لا يمكن تحديد المسافة بدون معرفة ثابت الزنبرك ومقدار الكتلة.

12. بندول بسيط زمنه الدوري 2.5 s. (i) ما هو زمنه الدوري اذا كان طوله الان اصبح اطول باربعة مرات؟ (a) 1.25 s (b) 1.77 s (c) 2.5 s (d) 3.54 s (e) 5 s (ii) ما هو زمنه الدوري اذا بقي طوله بدون تغير ولكن ازدادت الكتلة المعلقة به اربعة مرات؟ اختر من الاجابات السابقة.

13. بندول بسيط معلق في سقف مصعد، وتم حساب الزمن الدوري. (i) عندما كان المصعد يتسارع إلى الاعلى فان زمنه الدوري (a) اكبر (b) اصغر (c) لا يتغير؟ (ii) عندما كان المصعد يتسارع إلى الاسفل فان زمنه الدوري (a) اكبر (b) اصغر (c) لا يتغير؟ (iii) عندما تحرك المصعد بسرعة ثابتة إلى الاعلى، فان زمنه الدوري (a) اعلى (b) اصغر (c) لا يتغير؟

أسئلة نظرية Conceptual Questions

1. هل الكرة التي تسقط على الأرض وتصعد ثم ترتفع عدة مرات تعتبر مثالاً على الحركة التوافقية البسيطة؟ وهل الحركة اليومية للطالب في ذهابه وإيابه للمدرسة يعتبر حركة توافقية بسيطة؟ علل إجابتك.

2. إذا كانت إحداثيات جسم تتغير حسب المعادلة $x = -A\cos\omega t$، ما هو ثابت الطور وما هو موضع الجسم عند الزمن $t = 0$؟

3. هل الإزاحة لجسم متذبذب بين $t = 0$ وأي زمن أخر t من الضروري ان يساوي موضع الجسم عند الزمن t؟ اشرح ذلك.

4. حدد إذا كانت هذه الكميات لها نفس الاتجاه في الحركة التوافقية البسيطة: (a) الموضع والسرعة، (b) السرعة والتسارع، (c) الموضع والتسارع.

5. أوصف حركة كتلة متصلة بزنبرك عندما لا تكون كتلة الزنبرك مهملة.

6. كتلة متصلة بزنبرك تتحرك حركة توافقية بسيطة بسعة A. هل الطاقة الكلية تتغير إذا تضاعفت الكتلة ولكن السعة لم تتغير؟ هل طاقة الحركة وطاقة الوضع تعتمد على الكتلة؟ وضح إجابتك.

7. ماذا يحدث للزمن الدوري للبندول البسيط إذا زاد طوله بمقدار الضعف؟ وماذا يحدث للزمن الدوري إذا زادت كتلة الجسم المعلق بالبندول إلى الضعف؟

8. إذا تم تحديد الزمن الدوري لبندول بسيط معلق في سقف مصعد. أوصف التغير الذي يطرأ على الزمن الدوري عندما يتحرك المصعد (a) بتسارع إلى الأعلى، (b) بتسارع إلى الأسفل، (c) بسرعة ثابتة.

9. يتحرك بندول بسيط حركة توافقية بسيطة عندما تكون الزاوية θ صغيرة. هل تعتبر الحركة اهتزازية عندما تكون الزاوية θ كبيرة؟ كيف تؤثر زيادة الزاوية على الزمن الدوري للحركة؟

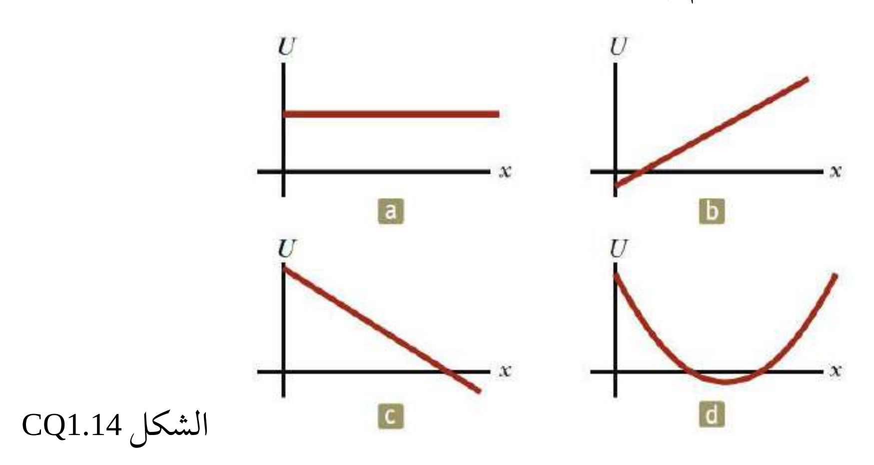
10. إذا كانت ساعة حائط من النوع الذي يعتمد على البندول البسيط تؤخر قليلا، كيف يمكن ضبط طول البندول بحيث تشير للوقت بدقة بدون تأخير؟

11. هل الحركة الاهتزازية المخمدة تحدث عند أي قيمة لـ b و k؟ وضح.

12. هل من الممكن أن يكون هناك حركة اهتزازية مخمدة عندما يكون النظام في حالة الرنين؟ وضح.

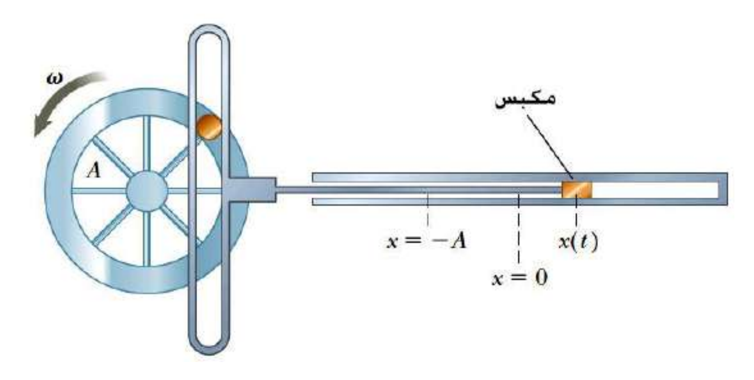
13. إذا كانت الكتلة المعلقة بالبندول البسيط عبارة عن كرة مملوءة بالماء. ماذا يحدث لتردد البندول إذا كان هناك ثقب في الكرة يسمح بتسرب الماء ببطء؟

14. يوضح الشكل CQ1.14 منحنيات لطاقة الوضع لاربعة انظمة مختلفة كدالة في موضع الجسم في كل نظام. اعطي لكل جسم دفعة إلى موضع اختياري ليتحرك. أوصف حركة الجسم في كل حالة (a)، (b)، (c)، (d).



الشكل CQ1.14

15. اعتبر محرك يعمل بمكبس واحد كما هو موضح في الشكل CQ1.15. افترض ان العجلة تدور بسرعة زاوية ثابتة، اشرح لماذا ساق المكبس يتذبذب بحركة توافقية بسيطة.



الشكل CQ1.15

مسائل Problems

1. تشير لمسائل تطبيق مباشر **2.** تشير لمسائل متوسطة الصعوبة **3.** تشير إلى مسائل تحدي.
1. مسائل لها حل مفصل في دليل الطالب الإرشادي **1.** تشير إلى مسائل لها حل مفصل فيديو على موقع داعم للكتاب. **Q|C** تشير إلى مسائل تحتاج إلى حل وتفسير **S** تشير إلى مسائل رمزية تتطلب تفسير **Shaded** تشير إلى مسائل مزدوجة تطور مفاهيم برموز وقيم عددية.

1.1 حركة جسم متصل في زنبرك Motion of an Object Attached to a Spring

1. جسم كتلته 0.60 kg متصل مع زنبرك ثابته 130 N/m حر الحركة على سطح افقي املس كما هو موضح في الشكل 1.1. تم افلات الجسم من السكون عندما كان الزنبرك متمدد بمقدار 0.13 من موضع اتزانه. عند لحظة الافلات اوجد (a) القوة المؤثرة على الجسم و(b) تسارعه.

2. عندما يوضح جسم كتلته 4.25 kg فوق زنبرك رأسي، انضغط الزنبرك مسافة مقدارها 2.62 cm. ما هو ثابت الزنبرك؟

2.1 نموذج تحليل: جسيم في حالة حركة توافقية بسيطة
Analysis Model: Particle in simple Harmonic Motion

3. استطال زنبرك رأسي مسافة مقدارها 3.9 cm عندما تم تعليق جسم كتلته 10 g به. استبدل الجسم باخر كتلته 25 g يتذبذب للاعلى وللاسفل في حركة توافقية بسيطة. احسب الزمن الدوري للحركة.

4. في محرك السيارة يتحرك المكبس حركة توافقية بسيطة، فاذا كان المكبس يتحرك طبقا للمعادلة التالية:

$$x = 5.00\text{ cm}\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

حيث x بالسنتيمتر والزمن t بالثانية. عند الزمن $t = 0$، اوجد (a) موقع المكبس، (b) سرعة المكبس، و(c) تسارع المكبس. (d) اوجد الزمن الدوري وسعة الحركة.

5. موضع جسم يعطى بالعلاقة $x = 4.00 \cos(3.00\pi t+\pi)$، حيث x بالمتر و t بالثواني. حدد (a) التردد والزمن الدوري للحركة، (b) سعة الحركة، (c) ثابت الطور، (d) موضع الجسم عند الزمن $t = 0.250$s.

6. مكبس في محرك جازولين يتحرك حركة توافقية بسيطة. يعمل المحرك بمعدل 3600 rev/min. باخذ اقصى موضعين بالنسبة لنقطة المركز على انها ±5.00 cm. اوجد مقادر (a) اقصى سرعة (b) اقصى تسارع للمكبس.

7. جسم كتلته 1.00 kg متصل مع زنبرك بشكل افقي. استطال الزنبرك مسافة 0.10 m وترك الجسم ليتذبذب من السكون وبدون احتكاك. في المرة الثانية التي كانت فيها سرعة الجسم مساوية للصفر كانت بعد مرور فترة زمنية مقدارها 0.50 s. ما هي اقصى سرعة للجسم؟

8. متذبذب توافقي بسيط يحتاج إلى 12.0s لاكمال 5 تذبذبات. اوجد (a) الزمن الدوري للحركة، (b) التردد بوحدة الهيرتز، و(c) التردد الزاوي بوحدة rad/s.

9. جسم كتلته 7.00 kg معلق في اسفل زنبرك وطرف الزنبرك العلوي مثبت رأسيا في السقف، اذا كان الجسم يتذبذب بزمن دوري مقداره 2.60s. أوجد ثابت الزنبرك.

10. **Q|C** (a) زنبرك معلق استطال بمقدار 35.0 cm عندما تم تعليق جسم كتلته 450 g في الزنبرك في حالة سكون. في هذه الحالة فاننا نعرف الموضع على انه $x = 0$. تم سحب الجسم للاسفل مسافة اضافية مقدارها 18.0 cm وتم تركه من السكون ليتذبذب بدون احتكاك. ما هو موضعه x بعد مرور فترة زمنية مقدارها 84.4 s؟ (b) اوجد المسافة التي تحرك بها الجسم المتذبذب في الجزء (a). (c) ماذا لو؟ تم تعليق زنبرك اخر واستطال بمقدار 35.5 cm عند تعليق جسم كتلته 440 g به في حالة سكون. نعرف هذا الموضع الجديد على انه $x = 0$. تم سحب الجسم هذا ايضا للاسفل مسافة مقدارها 18.0 cm وتم تركه ليتذبذب من السكون وبدون احتكاك. اوجد موضعه بعد مرور فترة زمنية مقدارها 84.4s s. (d) اوجد المسافة التي يتحركها الجسم في الجزء

(c). (e) لماذا تكون اجابتك في الجزئين (a) و(c) مختلفتين جدا بينما البيانات الابتدائية في كلا الحالتين متشابهتين وكانت اجابة كلا من (b) و(d) متقاربتين نسبيا؟

11. يتحرك جسم على امتداد محور x. كان موضعه الابتدائي عند 0.270 m، وتحرك بسرعة 0.140 m/s وتسارعه $-0.320\ m/s^2$. افترض انه يتحرك كجسم تحت تسارع ثابت لمدة 4.50 s اوجد (a) موضعه و(b) سرعته عند نهاية هذه الفترة الزمنية. من ثم افترض انه تحرك بحركة توافقية بسيطة لمدة 4.50 s و $x = 0$ هو موضع اتزانه. اوجد (c) موضعه و(d) سرعته عند نهاية هذه الفترة الزمنية.

12. **Q|C** سقطت كرة من ارتفاع 4.00 m وقامت بتصادم مرن مع الأرض. افترض عدم وجود فقد في الطاقة الميكانيكية، (a) اثبت ان الحركة دورية و(b) احسب الزمن الدوري للحركة. (c) هل الحركة هي حركة توافقية بسيطة؟ اشرح.

13. يتحرك جسم على امتداد محور x بحركة توافقية بسيطة بدأت من السكون، كانت نقطة الاصل عند $t = 0$ وكانت الحركة إلى اليمين. سعة الحركة 2.00 cm، وتردد الحركة 1.50 Hz. (a) اوجد صيغة للموضع الجسم كدالة في الزمن. احسب (b) اقصى سرعة للجسم و(c) الزمن من بداية الحركة $(t > 0)$ والتي كان الجسم يمتلك تلك السرعة. اوجد (d) اقصى تسارع موجب للجسم و(e) الزمن من بداية الحركة $(t > 0)$ والتي كان الجسم يمتلك هذا التسارع. (f) اوجد المسافة الكلية التي قطعها الجسم بين الفترتين $t = 0$ و $t = 1.00\ s$.

14. طائرة صغيرة كتلتها 1.00 kg متصلة في زنبرك ثابته 25.0 N/m يتذبذب افقيا على سطح عديم الاحتكاك. عند زمن $t = 0$، تركت الطائرة من السكون عند $x = -3.00\ cm$ (هذا يعني ان الزنبرك انضغط مسافة مقدارها 3.00 cm). اوجد (a) الزمن الدوري للحركة، (b) اقصى قيمة للسرعة والتسارع، (c) الموضع والسرعة والتسارع كدالة في الزمن.

15. جسم كتلته 0.500 kg معلق في زنبرك ثابته $k = 8.00\ N/m$ يتذبذب بحركة توافقية بسيطة بسعة مقدارها 10.0 cm. احسب (a) اقصى قيمة للسرعة والتسارع، (b) سرعة

وتسارع الجسم عندما يكون الجسم على مسافة 6.00 cm من نقطة الاتزان، (c) الفترة الزمنية اللازمة للجسم ليتحرك من $x = 0$ إلى $x = 8.00\text{cm}$.

.16 **Q|C** افترض انك قمت بتعليق جسم في اسفل زنبرك رأسي. استطال الزنبرك لمسافة مقدارها 18.3 cm وبقي في حالة سكون. من ثم قمت بجعل الجسم يتذبذب. (a) هل لديك معلومات كافية لايجاد الزمن الدوري؟ (b) اشرح اجابتك.

3.1 طاقة المتذبذب التوافقي البسيط
Energy of the Simple Harmonic Oscillator

.17 اصطدمت سيارة كتلتها 1000 kg بجدار من الطوب في تجربة لفحص قوة تحمل الصدام فيها. فاذا كان الصدام يمثل زنبرك بثابت قوة مقداره 5.00×10^{6} N/m وينضغط مسافة مقدارها 3.16 cm لتتوقف السيارة. ما هي سرعة السيارة قبل الاصطدام، مع افتراض ان لا يوجد فقد في الطاقة ناتج عن التصادم.

.18 جسم كتلته 200 g متصل بزنبرك افقي ويتحرك حركة توافقية بسيطة بزمن دوري مقداره 0.250 s. إذا كانت الطاقة الكلية للنظام هي 2.00 J، أوجد (a) ثابت الزنبرك، (b) سعة الحركة.

.19 كتلة جسم 50.0 g متصل بزنبرك ($k = 35.0$ N/m) يتذبذب على سطح افقي عديم الاحتكاك بسعة حركة مقدارها 4.00 cm. اوجد (a) الطاقة الكلية للنظام، (b) سرعة الجسم عندما تكون ازاحته 1.00 cm. اوجد (c) طاقة الحركة، (d) طاقة الوضع عندما تكون ازاحة الجسم 3.00 cm.

.20 جسم كتلته 2.00 kg متصل مع زنبرك وموضوع على سطح افقي املس. يتطلب قوة افقية مقدارها 20.0 N للحفاظ على الجسم في حالة سكون عند سحبه مسافة مقدارها 0.20 m من موضع اتزانه على محور x. تم تحرير الجسم من السكون واصبح في حالة حركة توافقية بسيطة. اوجد (a) ثابت الزنبرك، (b) تردد الحركة، (c) اقصى سرعة للجسم. (d) حدد الموضع الذي يصل فيه الجسم لاقصى سرعة له. (e) اوجد

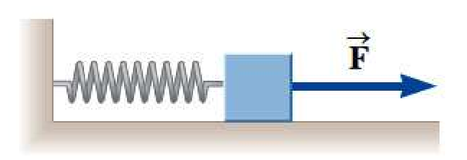
اقصى تسارع للجسم (f) حدد الموضع الذي يصل فيه الجسم لاقصى تسارع له. (g) اوجد الطاقة الكلية للنظام المتذبذب. اوجد (h) سرعة و(i) تسارع الجسم عندما يكون موضعه مساويا لثلث اقصى قيمة له.

21. S Q|C حركة توافقية بسيطة سعتها A وطاقتها الكلية E. احسب (a) الطاقة الحركية، (b) طاقة الوضع عندما يكون الموضع يساوي ثلث سعة الحركة. (c) ما هي قيم الموضع التي تكون فيها طاقة الحركة مساوية لنصف طاقة الوضع؟ (d) هل هناك قيم للموضع تكون عندها طاقة الحركة اكبر من اقصى طاقة وضع؟ اشرح.

22. رياضي كتلته 65.0 kg يقفز بالحبل المطاطي متصل في الجسر ويلتف حول الرياضي. اذا كان طول الحبل المطاطي الاصلي هو 11.0 m. يصل الرياضي عند اسفل حركته لمسافة 36.0 m اسفل الجسر قبل ان يرتد للاعلى. اوجد الفترة الزمنية المستغرقة في القفز من الجسر والوصول إلى مسافة 36.0 m اسفل الجسر. يمكن تقسيم حركة الرياضي الكلية إلى 11.0 m سقوط حر و25.0 m حركة توافقية بسيطة. (a) لحركة السقوط الحر، ما هو النموذج التحليلي المناسب لوصف حركة الرياضي؟ (b) ما هو الفترة الزمنية المستغرقة في حالة السقوط الحر؟ (c) للحركة التوافقية البسيطة، هل يكون النظام المكون من الرياضي والحبل المطاطي والكرة الأرضية معزولا او غير معزولا؟ (d) من خلال اجابتك على الجزء (c) اوجد ثابت الزنبرك للحبل المطاطي. (e) ما هو موضع نقطة الاتزان الذي تكون عندها توازن بين قوة الزنبرك وقوة الجاذبية الأرضي.المبذولة على الرياضي؟ (g) ما هي الفترة الزمنية اللازمة للحبل ليستطال مسافة 25.0 m؟ (h) ما هي الفترة الزمنية الكلية لرحلة القفز مسافة 36.0 m؟

23. Q|C جسم كتلته 0.250 kg مستقرا على سطح افقي عديم الاحتكاك ومتصلا مع زنبرك ثابته يساوي 83.8 N/m كما هو موضح في الشكل P1.23. اثرت قوة افقية $\vec{F}$ وتسببت في استطالة الزنبرك مسافة مقدارها 5.46 cm من موضع الاتزان. (a) اوجد مقدار القوة $\vec{F}$. (b) ما هي الطاقة الكلية المختزنة في النظام عندما يستطال الزنبرك؟ (c) اوجد مقدار تسارع الجسم عندما يصل لموضع اتزانه. (e) اذا كان هناك احتكاك

واستمر الجسم في الوصول إلى نقطة اتزانه، هل تكون اجابتك لـ (d) اكبر او اصغر؟
(f) ما هي المعلومات الاضافية التي تحتاج لايجاد الاجابة الفعلية لـ (d) في هذه الحالة؟
(g) ما هي اقصى قيمة لمعامل الاحتكاك الذي يسمح للجسم ان يصل إلى موضع اتزانه؟



الشكل P1.23

24. جسم كتلته 326 g متصلا مع زنبرك ويتحرك حركة توافقية بسيطة بزمن دوري مقداره 0.250 s. اذا كانت الطاقة الكلية للنظام هي 5.83 J، اوجد (a) اقصى سرعة للجسم، (b) ثابت الزنبرك، (c) سعة الحركة.

4.1 المقارنة بين الحركة التوافقية البسيطة والحركة الدائرية المنتظمة Comparing Simple Harmonic Motion with Uniform Circular Motion

25. **Q|C** بينما تنطلق سيارة بسرعة 3.00 m/s، لوحظ على اطار السيارة انتفاخ جانبي bump كما في الشكل P1.25. (a) اشرح لماذا هذا الانتفاخ يظهر حركة توافقية بسيطة، (b) اذا كان نصف قطر الاطار 0.300 m، ما هو الزمن الدوري للانتفاخ؟



الشكل P1.25

5.1 البندول The Pendulum

26. بندول الثواني هو بندول يتحرك خلال موضع اتزانه مرة واحدة كل ثانية. (الزمن الدوري للبندول هي 2 s). طول بندول الثواني 0.9927 m في طوكيو باليابان وطوله 0.9942 m في كامبردج ببريطانيا. ما هي نسبة السقوط الحر في المكانين؟

27. بندول بسيط يصنع 120 اهتزازة كاملة في 3.00 min عند موقع حيث تكون عجلة الجاذبية الأرضية $g = 9.8\ m/s^2$؟ اوجد (a) الزمن الدوري للبندول و(b) طوله.

28. S جسم كتلته m ينزلق بدون احتكاك في داخل تجويف نصف كروي بصف قطره R. اثبت انه، اذا بدء الحركة من السكون بازاحة صغيرة من وضع الاتزان، فان الجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة بتردد زاوي يساوي $\omega = \sqrt{g/R}$.

29. بندول طبيعي على شكل جسم مسطح يتحرك حركة توافقية بسيطة بتردد 0.450 Hz. اذا كانت كتلة البندول 2.20 kg ومحور تعليق البندول على مسافة 0.350 m من مركز الثقل، احسب عزم القصور الذاتي حول نقطة التعليق.

30. S بندول طبيعي على شكل جسم مسطح يتحرك حركة توافقية بسيطة بتردد f. اذا كانت كتلة البندول m ومحور تعليق البندول على مسافة d من مركز الثقل، احسب عزم القصور الذاتي حول نقطة التعليق.

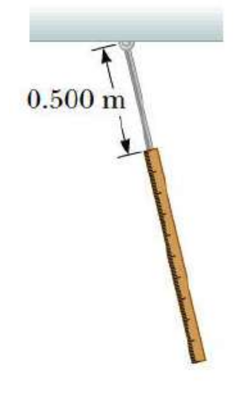
31. Q|C كتلة بندول بسيط 0.250 kg وطوله 1.00 m. فاذا ازيح بزاوية مقدارها 15.0^{o} ومن ثم ترك. ما هو (a) اقصى سرعة، (b) اقصى تسارع زاوية، (c) اقصى قوة استرجاع؟

32. S اعتبر البندول البسيط الموضح في الشكل 18.1. (a) تمثل عزم قصوره حول محور يمر من مركز ثقله ويوازي المحور الذي يمر في محور دورانه بـ ICM اثبت ان الزمن الدوري يكون على النحو التالي:

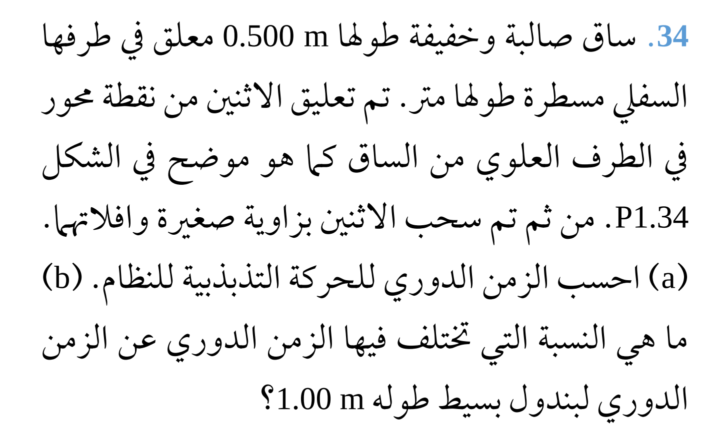
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + md^2}{mgd}}$$

حيث ان d هي المسافة بين نقطة محور الدوران ومركز الثقل. (b) اثبت ان الزمن الدوري له ادنى قيمة عندما d تحقق الشرط $md^2 = I_{CM}$.

.33 بندول بسيط طوله 5.00 m. ما هو الزمن الدوري لهذا البندول عندما يتذبذب بمقدار بسيط اذا وضع في مصعد (a) يتسارع إلى الأعلى بـ $5.00\ m/s^2$؟ (b) يتسارع إلى الاسفل بـ $5.00\ m/s^2$؟ (c) ما مقدار الزمن الدوري لهذا البندول اذا وضع في شاحنة تتسارع افقيا بـ $5.00\ m/s^2$؟



الشكل P1.34

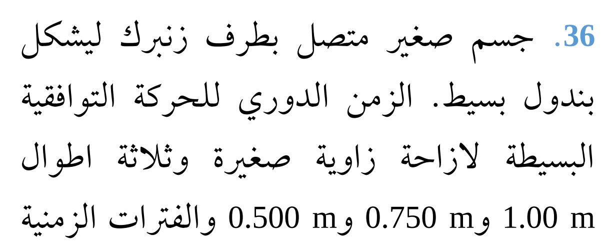


.34 ساق صالبة وخفيفة طولها 0.500 m معلق في طرفها السفلي مسطرة طولها متر. تم تعليق الاثنين من نقطة محور في الطرف العلوي من الساق كما هو موضح في الشكل P1.34. من ثم تم سحب الاثنين بزاوية صغيرة وافلاتها. (a) احسب الزمن الدوري للحركة التذبذبية للنظام. (b) ما هي النسبة التي تختلف فيها الزمن الدوري عن الزمن الدوري لبندول بسيط طوله 1.00 m؟



الشكل P1.35

.35 عجلة اتزان ساعة كما هو موضح في الشكل P1.35 تمتلك زمنا دوريا مقداره 0.250 s. كتلة العجلة تساوي 20.0 g متمركزة حول حافة نصف قطرها 0.500 cm. ما هو (a) عزم القصور الذاتي للعجلة و(b) ثابت اللي للزنبرك المتصل بها؟



.36 جسم صغير متصل بطرف زنبرك ليشكل بندول بسيط. الزمن الدوري للحركة التوافقية البسيطة لازاحة زاوية صغيرة وثلاثة اطوال 1.00 m و0.750 m و0.500 m والفترات الزمنية الكلية لـ 50 اهتزازة هي 99.8 s و86.6 s و71.1 s تم قياسها بساعة ايقاف. (a) احسب الزمن الدوري للحركة لكل طول. (b) احسب القيمة المتوسطة لـ g من هذه القياسات

وقارنها بالقيمة المعروفة. (c) ارسم T^2 مقابل L واحصل على قيمة لـ g من ميل الخط المستقيم الذي يمثل افضل ملائمة للمنحنى. (d) قارن القيمة التي وجدتها في الجزء (c) مع تلك التي حصلت عليها في الجزء (b).

6.1 الاهتزازات المخمدة Damped Oscillations

37. بندول طوله 1.00m ترك عند زاوية 15.0^o. بعد 1000s قلت سعته لتصبح 5.50^o. ما هي قيمة b/2m؟

38. S اثبت ان المعدل الزمني لتغير الطاقة الميكانيكية للمتذبذب المخمد يعطى بالعلاقة

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2$$

وبالتالي تكون دائما سالبة. للوصول إلى الحل المطلوب قم باشتقاق المعادلة الخاصة بالطاقة الميكانيكية للمتذبذب $E = 1/2mv^2 + 1/2kx^2$ واستخدم المعادلة 31.1.

39. جسم كتلته 10.6kg معلق في نهاية زنبرك ($k = 2.05\times10^4$ N/m). إذا كانت مقاومة الهواء تسبب اخماد لحركته بمعامل اخماد $b = 3.00$ N.s/m. (a) احسب تردد الحركة المخمدة. (b) ما هي النسبة المئوية لنقصان سعة الحركة في كل دورة. (c) اوجد الفترة الزمنية لكي تقل طاقة النظام بمقدار 5.00% عن قيمتها الاصلية.

40. S اثبت ان المعادلة 32.1 هي حل للمعادلة 31.1 مع العلم ان $b^2 < 4mk$.

7.1 الاهتزازات القسرية Forced Oscillations

41. جسم كتلته 2.00 kg معلق بزنبرك يتحرك بدون احتكاك ($b = 0$) وبتأثير قوة خارجية $F = 3.00\text{N} \sin(2\pi t)$. حيث ان F بوحدة نيوتن و t بوحدة الثانية. إذا كان ثابت الزنبرك 20.0 N/m، اوجد (a) التردد الزاوي الرنيني للنظام و(b) التردد الزاوي للقوة الخارجية و(c) سعة الحركة.

42. جسم وزنه 40.0 N معلق في زنبرك ثابته 200 N/m. النظام غير مخمد ويتعرض لقوة قسرية خارجية بتردد مقداره 10 Hz وينتج عنها حركة اهتزازية للجسم بسعة 2.00 cm اوجد اقصى قيمة للقوة الخارجية.

43. جسم كتلته 0.150 kg معلق بزنبرك ثابته 6.30 N/m يتبذب تحت تأثير قوة خارجية جيبية سعتها 1.70 N وبدون اخماد، ما هو تردد القوة التي تجعل الجسم يتذبذب بسعة مقدرها 0.440 m؟

44. S اعتبر حركة اهتزازية قسرية غير مخمدة ($b = 0$)، اثبت ان المعادلة 35.1 هي حل للمعادلة 34.1 بسعة تعطى بالمعادلة 36.1.

إجابات أسئلة للتفكير

1. (d)

2. (f)

3. (a)

4. (b)

5. (c)

6. (i) (a) (ii) (a)

إجابات الأسئلة الفردية

1. (a) 17 N to the left (b) 28 m/s^2 to the left

3. 0.63 s

5. (a) 1.50 Hz (b) 0.667 s (c) 4.00 m (d) π rad (e) 2.83 m

7. 0.628 m/s

9. 40.9 N/m

11. (a) – 2.34 m (b) – 1.30 m/s (c) – 0.0763 m (d) 0.315 m/s

13. (a) $x = 2.00 \cos(3.00\pi t - 90°)$ or $x = 2.00 \sin(3.00\pi t)$

(b) 18.8 cm/s (c) 0.333 s (d) 178 cm/s^2 (e) 0.500 s (f) 12.0 cm

15. (a) 40.0 cm/s (b) 160 cm/s^2 (c) 32.0 cm/s (d) 296.0 cm/s^2 (e) 0.232 s

17. 2.23 m/s

19. (a) 28.0 mJ (b) 1.02 m/s (c) 12.2 mJ (d) 15.8 mJ

21. (a) 8/9 E (b) 1/9 E (c) $x = \pm\sqrt{2/3}\,A$

(d) لا، اقصى طاقة وضع تساوي الطاقة الكلية للنظام، وذلك لان الطاقة الكلية يجب ان تبقى ثابتة، وطاقة الحركة لا يمكن ان تكون اكبر من اقصى طاقة وضع.

23. (a) 4.58 N (b) 0.125 J (c) 18.3 m/s^2 (d) 1.00 m/s (e) اصغر

(f) معامل الاحتكاك الحركي بين الجسم والسطح (g) 0.934

25. (b) 0.628 s

27. (a) 1.50 s (b) 0.559 m

29. 0.944 kg.m^2

31. (a) 0.820 m/s (b) 2.57 rad/s^2 (c) 0.641 N (d) v_{max} = 0.817 m/s,
a_{max} = 2.54 rad/s^2, F_{max} = 0.634 N

(e) الإجابات متقاربة ولكن ليست نفسها. أجريت الحسابات باستخدام مبدأ الحفاظ على الطاقة ولكن من قانون نيوتن الثاني تكون الإجابات أكثر دقة.

33. (a) 3.65 s (b) 6.41 s (c) 4.24 s

35. (a) 5.00 × 10^{-27} kg.m^2 (b) 3.16 × 102^{-4} N.m/rad

37. 1.00 × 10^{-3} s^{-1}

39. (a) 7.00 Hz (b) 2.00% (c) 10.6 s

41. (a) 3.16 s^{-1} (b) 6.28 s^{-1} (c) 5.09 cm

43. 0.641 Hz or 1.31 Hz



د. حازم فلاح سكيك
استاذ الفيزياء المشارك بجامعة الازهر – غزة

- رئيس قسم الفيزياء بجامعة الازهر - غزة في الفترة 1998-1993
- مؤسس وعميد كلية الدراسات المتوسطة بجامعة الازهر - غزة من الفترة 1996-2005
- عميد القبول والتسجيل بجامعة الازهر - غزة في الفترتين 1998-2000 و2007-2008
- مدير الحاسب الالي بجامعة الازهر - غزة في الفترة من 1994-2000
- رئيس وحدة تكنولوجيا المعلومات بجامعة الازهر - غزة في الفترة من 2005-2000
- مؤسس موقع الفيزياء التعليمي
- مؤسس اكاديمية الفيزياء للتعليم الالكتروني
- مؤسس مركز الترجمة العلمي
- مؤسس قناة الفيزياء التعليمي على اليوتيوب
- مؤسس ورئيس تحرير مجلة الفيزياء العصرية

لمزيد من المعلومات يرجى زيارة

المؤسسة الإعلامية لشبكة الفيزياء التعليمية

www.hazemsakeek.net